

Diplomarbeit

Untersuchung des Konzepts eines Experiments
zur Suche nach dem neutrinolosen
Doppelbetazerfall mit CdTe-Pixeldetektoren

Thomas Gleixner

April 2011



Physikalisches Institut der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1 Grundlagen	3
1.1 Neutrinoloser $\beta\beta$ -Zerfall und Neutrinomasse	3
1.2 Der Timepix Detektor	6
1.3 Monte Carlo Simulation mit ROSI	8
1.4 Spannung und Driftzeiten	11
1.5 Charge Sharing	19
1.6 TOTnoise	20
1.7 Wichtungspotential	23
1.8 Bewegung von Elektronen im Sensor	27
2 Datenanalyse	29
2.1 Sensitivität	29
2.2 Energieauflösung	34
2.3 Detektionseffizienz	37
3 Spuranalyse	39
3.1 Spuranalyse mit einem neuronalem Netz	42
3.2 Kriterien	44
3.3 Auswertung	55
3.4 Ergebnisse	57
3.5 Zusammenfassung	60
4 Optimierung des Detektors	63
4.1 Face To Face	63
4.2 Spannung	64
4.3 Sensordicke	66
4.4 Pixelpitch	71
4.5 Einfluss des TOTnoise auf die Optimierung	72
4.6 Zusammenfassung	75
5 Zusammenfassung und Ausblick	77

Danksagung	81
Erklärung	83

Einleitung

Die Existenz von Neutrinos wurde erstmals 1930 von Wolfgang Pauli vorgeschlagen und 1956 von Cowan und Reines zum ersten Mal experimentell nachgewiesen [1]. Aufgrund ihrer besonderen Eigenschaften sind diese Teilchen immer noch Gegenstand aktueller Forschung. Ungeklärt ist die Frage, ob es sich um Dirac- oder Majorana-Teilchen handelt, also ob Neutrinos ihre eigenen Antiteilchen sind. Auch ihre Masse konnte bisher nicht gemessen werden. Diese Fragen könnte der neutrinolose $\beta\beta$ -Zerfall beantworten. Die Existenz des Zerfalls setzt voraus, dass es Majoranateilchen sind. Aus der Halbwertszeit der Zerfälle ließe sich ihre Masse berechnen.

Es existieren verschiedene Experimente, bzw. sind in Planung, die diesen Zerfall nachweisen sollen. Eines davon ist das COBRA Experiment[2]. Die Abkürzung steht für **C**adium **Z**ink **T**elluride **0**-Neutrino **D**ouble-**B**eta **R**esearch **A**pparatus. Geplant ist der Einsatz von CdZnTe Halbleiter-Detektoren. Diese können bei Raumtemperatur betrieben werden und haben den Vorteil, dass die Quelle gleich dem Sensor ist, da ^{116}Cd zu $\beta\beta$ -Zerfall in der Lage ist. Falls der neutrinolose $\beta\beta$ -Zerfall existiert, müsste dies daher auch bei ^{116}Cd möglich sein.

Die experimentelle Schwierigkeit liegt vor allem in der sehr langen Halbwertszeit. Falls dieser Zerfall existiert, so liegt sie bei den meisten Isotopen vermutlich bei über 10^{25} Jahren, also viele Größenordnungen über dem Alter des Universums. Dies bedeutet, dass ein solches Experiment eine relativ massereiche Quelle und einen großen Messzeitraum benötigt, um überhaupt einige Ereignisse zu detektieren. Außerdem wird eine gute Detektionseffizienz und Energieauflösung benötigt und der Untergrund um bzw. oberhalb des Q-Wertes muss sehr niedrig sein. Hier hat ^{116}Cd den Vorteil eines relativ hohen Q-Wertes von etwa 2.8 MeV, der über der höchsten Photonenenergie der Nuklide der natürlichen Zerfallsreihen liegt.

Eine Möglichkeit den Untergrund zu reduzieren ist der Einsatz pixelierter Detektoren, wie des Timepix. Diese können Informationen über die Spur eines Ereignisses im Sensor liefern und sind somit geeignet Untergrund von den gesuchten Ereignissen zu trennen. Dieser Ansatz soll in dieser Arbeit untersucht werden. Dabei liegt der Fokus auf den Einsatzmöglichkeiten des Timepix, also den Möglichkeiten zur Untergrundunterdrückung mithilfe der Spuranalyse und auf der erreichbaren Sensitivität, Detektionseffizienz und Energieauflösung in Abhängigkeit von den Detektorparametern. Dies soll mithilfe von Monte Carlo Simulationen untersucht werden.

1 Grundlagen

1.1 Neutrinoloser $\beta\beta$ -Zerfall und Neutrinomasse

Beim einfachen β -Zerfall, zerfällt ein Neutron eines Kerns in ein Proton und ein Elektron sowie ein Elektron-Antineutrino:

$$(A, Z) \rightarrow (A, Z + 1) + e^- + \bar{\nu}_e$$

Hierbei bezeichnet A die Nukleonenzahl und Z die Protonenzahl.

Die Bedingung für diesen Zerfall ist, dass das entstehende Atom energetisch günstiger ist als das ursprüngliche. Dies ist bei einer großen Zahl der existierenden Isotope möglich.

Beim $\beta\beta$ -Zerfall zerfallen zwei Neutronen zu Protonen und es werden dementsprechend zwei Elektronen und Elektron-Antineutrino frei.

$$(A, Z) \rightarrow (A, Z + 2) + 2e^- + 2\bar{\nu}_e$$

Die Bedingung hierfür ist wieder, dass das entstehende Atom energetisch günstiger ist als das ursprüngliche. Ein experimenteller Nachweis setzt außerdem voraus, dass $(A, Z + 1)$ energetisch höher liegt als (A, Z) , also dass der einfache β -Zerfall nicht möglich ist, da dieser aufgrund der wesentlich kleineren Halbwertszeit einen eventuellen $\beta\beta$ -Zerfall verdecken würde.

Diese Voraussetzungen können erfüllt werden wie an der Weizsäcker-Massenformel[8], einer Näherung für die Atommasse, zu erkennen ist.

$$M(A, Z) = NM_n + ZM_p + Zm_e - a_v A + a_s A^{\frac{2}{3}} + a_c \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} + a_a \frac{(N - Z)^2}{4A} + \frac{\delta}{A^{\frac{1}{2}}} \quad (1.1)$$

Hierbei ist N die Zahl der Neutronen, M_n die Masse des Neutrons, Z die Zahl der Protonen, M_p die Protonenmasse, m_e die Elektronenmasse, A die Nukleonenzahl, und $a_v, a_s, a_c, a_a, \delta$ Parameter, deren genauer Wert vom Massebereich in dem die Formel gelten soll abhängig sind.

Diese Formel beinhaltet aufgrund der Paarungsenergie den Summanden, $\delta/A^{\frac{1}{2}}$ der von der Protonen-/Neutronen Zahl abhängt. Beispielsweise gilt für:

gerade/gerade Kerne:	$\delta = -11.2MeV/c^2$
ungerade/ungerade Kerne:	$\delta = +11.2MeV/c^2$
gerade/ungerade Kerne:	$\delta = 0$
ungerade/gerade Kerne:	$\delta = 0$

Daher ergeben sich für Isobare geradzahlgiger Nukleonenzahl zwei verschobene Massenparabeln, die den $\beta\beta$ -Zerfall erlauben können. Einige Isotope bei denen dieser Zerfall möglich ist, sind beispielsweise ^{76}Ge , ^{100}Mo , ^{116}Cd , ^{130}Te , ^{136}Xe .

Beim neutrinolosen $\beta\beta$ -Zerfall ($0\nu\beta\beta$) findet dieser Zerfall ohne Emission von Neutrinos statt: $(A, Z) \rightarrow (A, Z + 2) + 2e^-$

Dieser Zerfall lässt sich so darstellen, dass an einem Vertex durch den Zerfall eines Neutrons ein Elektron und Elektron-Antineutrino emittiert werden und das Elektron-Antineutrino am anderen Vertex als Elektron-Neutrino absorbiert wird, sodass ein Neutron sich in ein Elektron und ein Proton umwandelt.

Dies verletzt offensichtlich die Leptonenzahlerhaltung (es werden zwei Leptonen erzeugt, aber keine Anti-Leptonen) und ist daher nach dem Standardmodell nicht erlaubt. Für die Existenz und den Nachweis dieses Zerfalls müssen also mehr Bedingungen erfüllt werden als beim neutrinobehafteten $\beta\beta$ Zerfall:

- der $\beta\beta$ -Zerfall ist möglich und nachweisbar
- das Neutrino hat eine Masse größer Null
- das Neutrino ist ein Majorana-Teilchen (und damit sein eigenes Anti-Teilchen)

Die erste Bedingung ist offensichtlich: Wäre der $\beta\beta$ -Zerfall energetisch nicht erlaubt, bzw. aufgrund des einfachen β -Zerfalls nicht nachweisbar, so würde dies auch für den $0\nu\beta\beta$ -Zerfall gelten.

Die zweite Bedingung folgt daraus, dass Antineutrinos positive Helizität, Neutrinos negative Helizität haben. Daher muss sich die Helizität ändern können, was nur bei Teilchen mit Masse größer Null durch Lorentztransformation möglich ist. Bei masselosen Teilchen ist die Helizität gleich der lorentzinvarianten Chiralität. Im Standardmodell beträgt die Neutrinomasse Null, allerdings gibt es Experimente die eine Masse größer Null nachweisen. Zum Beispiel die Messung von Neutrinooszillation [8].

Die dritte Bedingung folgt, da das Antineutrino als Neutrino absorbiert werden soll. Dass es sich um Majoranateilchen handeln soll wird von Theoretikern der Grand Unified Theory vorgeschlagen[8].

Während das Energiespektrum des neutrinobehafteten $\beta\beta$ -Zerfalls relativ breit ist, da ein Teil der Energie von den Neutrinos fortgetragen wird, ist das Energiespektrum des neutrinolosen $\beta\beta$ -Zerfalls sehr scharf. Da keine Neutrinos im Ausgangskanal entstehen, erhalten die Elektronen die gesamte Energie.

Der Zerfall kann daher nachgewiesen werden indem bei einer bekannten Masse eines durch $\beta\beta$ zerfallenden Isotops und einer bekannten Messzeit, die Zahl der Ereignisse deren Energie sich um den Q-Wert (Massedifferenz der Ausgangs- und Endprodukte des Zerfalls mal c^2) des $0\nu\beta\beta$ Zerfalls befinden, gemessen werden. Wie viele Ereignisse zum Nachweis gemessen werden müssen, hängt vom Untergrund ab (dies wird in Kapitel 2

genauer behandelt). Daher ist ein hoher Q-Wert von Vorteil, da Zerfälle mit einer kleineren Energie nicht zum Untergrund in diesem Bereich beitragen.

Für die Halbwertszeit gilt [6]:

$$1/T_{1/2} = G^{0\nu} |M^{0\nu}|^2 \langle m_\nu \rangle^2 \quad (1.2)$$

Hierbei ist $G^{0\nu}$ das exakt berechenbare Phasenraum Integral, $|M^{0\nu}|$ das Matrixelement und $\langle m_\nu \rangle$ ist die effektive Majorana-Neutrinomasse. Das Matrixelement ist nicht exakt bekannt und verschiedene Modelle liefern unterschiedliche Ergebnisse. Einige Beispiele sind in Abbildung 1.1 gezeigt.

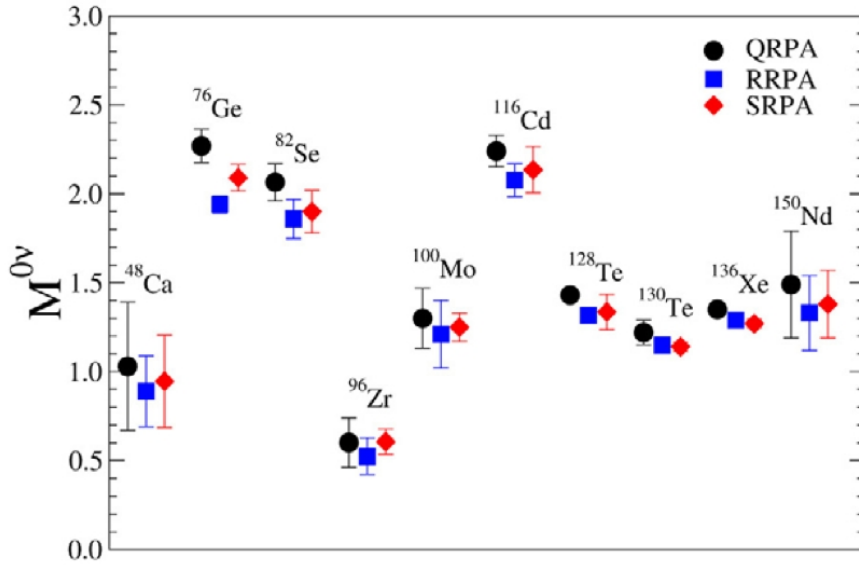


Abbildung 1.1 Matrixelemente $M^{0\nu}$ für verschiedene Modelle (QRPA, RRPA, SRPA)[7]

Der Nachweis des $0\nu\beta\beta$ -Zerfalls und die Messung der Halbwertszeit würde also zwei wichtige Fragen beantworten:

Welche effektive Majorana-Masse hat ein Elektronneutrino und handelt es sich dabei um ein Majorana- oder Dirac-Teilchen?

Dieser Zerfall soll mit COBRA in ^{116}Cd nachgewiesen werden. Dieses Element hat den Vorteil eines hohen Q-Wert von etwa 2.8 MeV und eines großen Matrixelements, verglichen mit anderen Nukliden, die zu $\beta\beta$ -Zerfall in der Lage sind.

1.2 Der Timepix Detektor

Ein Ansatz, den $0\nu\beta\beta$ -Zerfall nachzuweisen, ist der Einsatz pixelierter Detektoren, bei denen die Quelle gleich dem Sensor ist. Hierfür könnte ein Timepix Detektor[3] verwendet werden. Dieser ist eine Weiterentwicklung des Medipix2, der von der am CERN gegründeten Medipix-Kollaboration [5] entwickelt wurde. Abbildung 1.2 zeigt einen Timepix Detektor.

Der Timepix Detektor beinhaltet einen pixelierten Sensor, wobei jedes Pixel über

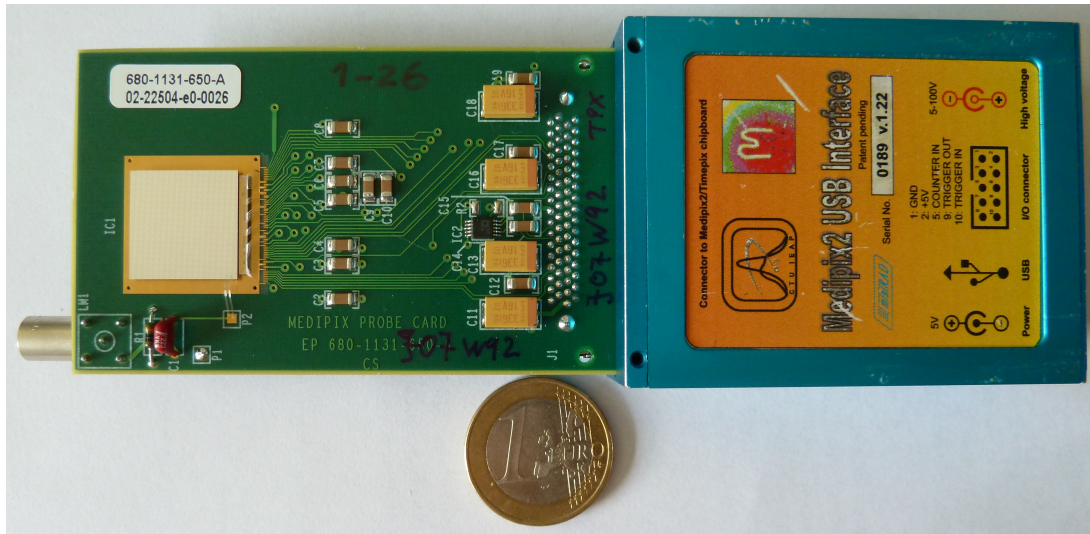


Abbildung 1.2 Ein Timepix Detektor mit Auslese

Lötperlen (bumb bonds) mit einer eigenen Pixelelektronik verbunden ist. Als Sensor-material können verschiedene Halbleiter verwendet werden, wie beispielsweise Silizium oder Cadmiumtellurid. Der Timepix ASIC besteht aus 256×256 Pixeln, mit $55 \mu\text{m}$ Pixelpitch. Die Größe der Pixel kann in Vielfachen von $55 \mu\text{m}$ geändert werden ohne die Elektronik zu ändern, indem nur jede n-te Pixelzelle mit dem Sensor verbunden wird.

Bewegen sich ionisierende Teilchen durch den Sensor (zum Beispiel Elektronen, Myonen, Alphateilchen), so wechselwirken diese mit dem Sensormaterial und erzeugen Elektronen-Loch-Paare. Eine Bias-Spannung erzeugt ein elektrisches Feld im Inneren des Sensors, durch das die Ladungsträger zu den Elektroden driften. Dabei influenzieren sie Ladungen an den Pixelelektroden. Der influenzierte Strom wird von der Pixelelektronik integriert und zu Spannungspulsen geformt.

Der influenzierte Strom wird über einen bestimmten Zeitraum integriert, der Integrationszeit. Diese liegt meist in der Größenordnung, die ein Elektron benötigt um durch die gesamte Sensordicke zu driften. Dies bedeutet, dass es nicht möglich ist, mehrere

Teilchen zu unterscheiden, die in diesem Zeitraum Ladungen erzeugt haben, da lediglich die gesamte Ladung gemessen wird.

Der Timepix lässt sich in verschiedenen Modi betreiben. Für das COBRA Experiment wichtig ist der Time-over-Threshold Modus (TOT). Dabei wird die Anzahl der Pulse einer von außen zugeführten Taktfrequenz gezählt (im Folgenden TOT-Schläge genannt). Gezählt wird während sich der Spannungspuls oberhalb einer bestimmten Schwelle (threshold) befindet. Diese Information kann ausgelesen werden. Dies ist schematisch in Abbildung 1.3 dargestellt. Die Schwelle dient dazu Rauschen zu unterdrücken, bewirkt aber auch, dass Energien unter einem bestimmten Wert nicht gemessen werden können. Im Folgenden wird mit Energieschwelle die Energie bezeichnet, welche aufgrund der Schwelle für den Spannungspuls nicht mehr gemessen werden kann. Bei den meisten Simulationen in dieser Arbeit wird davon ausgegangen, dass diese 7 keV beträgt. Dies ist ein für CdTe realistischer Wert. Das Rauschen der Messung der TOT-Schläge wird im Folgenden als TOTnoise bezeichnet, und ist in Kapitel 1.6 genauer erklärt.

Die Höhe der Spannungspulse hängt von der gesammelten Ladung ab und diese von der

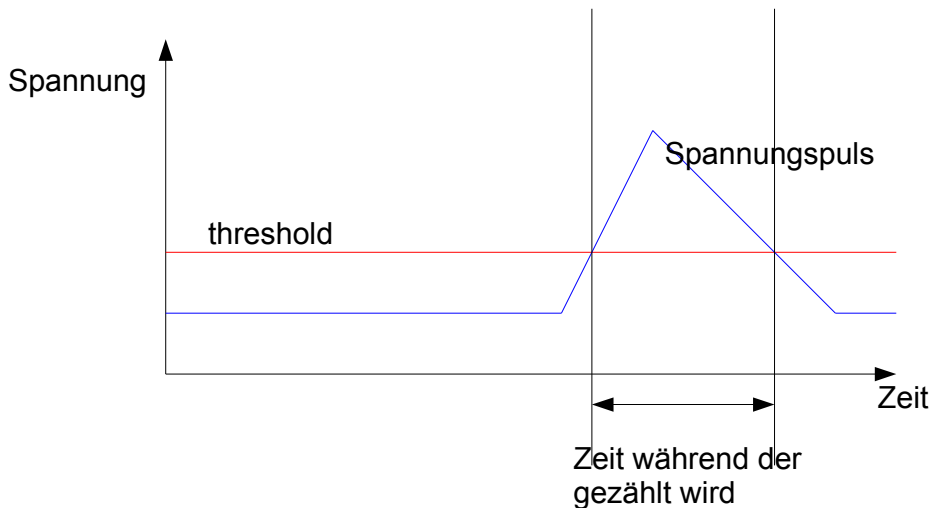


Abbildung 1.3 Funktionsweise des TOT-Modus: von außen wird eine Taktfrequenz zugeführt. Es wird die Zahl der Pulse (und somit die Zeit) gezählt, die der Spannungspuls über einer bestimmten Schwelle ist.

Energie, die ein Teilchen beim Durchgang durch das Pixel deponiert hat. Daher lässt sich aus der Zahl der TOT-Schläge diese Energie bestimmen. Da die Form des Spannungspulses neben der Energie noch von anderen Parametern abhängt, ist hierfür eine Kalibration des Detektors erforderlich.

Die Information, die der Detektor liefert, ist also wie viel Energie in jedem Pixel deponiert wurde. Ist die Länge der Spur eines Teilchens groß genug im Verhältnis zur Größe der Pixel, ist es also möglich ein Bild seiner Spur zu erhalten.

Die Antwort des Detektors entspricht aber nicht genau der vom durchgehenden Teilchen deponierten Energie. Es gibt verschiedene Quellen von Rauschen und Energieverlusten, wie beispielsweise die Rekombination von Ladungsträgern, oder dem Influenzieren von Ladungen auf benachbarten Pixelelektroden. Die Antwort hängt also nicht nur vom Pfad des Teilchens ab, sondern auch von den Parametern des Detektors.

Um das Verhalten von Detektoren mit verschiedenen Parametern und deren Eignung zur Suche nach dem $0\nu\beta\beta$ Zerfall zu testen, wurden Monte Carlo Simulationen verwendet.

1.3 Monte Carlo Simulation mit ROSI

Die in dieser Arbeit verwendeten Simulationen wurden mit dem Monte Carlo Simulationsprogramm ROSI [9][16] (**R**oentgen **S**imulation) durchgeführt. Das Programm wurde zur Simulation von Röntgenbildgebung entwickelt, kann aber auch zur Simulation von Elektronen verwendet werden.

Das Programm ist open source und in C++ geschrieben und kann daher gut angepasst werden. Es verwendet die folgenden Programmpakete:

RAVAR, EGS4, LSCAT, Gheisha, LSCAT-GISMO, LAM/MPI.

Eine ausführliche Beschreibung des Programms und der zugrundeliegenden physikalischen Prozesse kann in [16] gefunden werden.

Das Programm berechnet jedes Ereignis einzeln und unabhängig. Zunächst wird ein Ereignis erzeugt. Dies geschieht nach äußeren Vorgaben, beispielsweise durch Angabe einer Datei, in der dessen Parameter angegeben sind (Anzahl und Art der Teilchen und deren Impulse). Der Ort, an dem es erzeugt wird ist in ROSI angegeben, beispielsweise ein fester Punkt oder eine Gleichverteilung in einem bestimmten Raumvolumen. Dann wird seine Bewegung durch eine vorgegebene Struktur simuliert und die Ergebnisse werden gespeichert, zum Beispiel die Energie die vom Detektor in jedem Pixel gemessen wird. Anschließend wird das nächste Ereignis gestartet.

Es wird also die Antwort eines vorgegebenen Detektors auf ein vorgegebenes Ereignis simuliert. Damit wird außerdem die Masseabnahme des Sensormaterials durch Zerfälle vernachlässigt, alle Ereignisse sind unabhängig. Dies ist bei der erwarteten Halbwertszeit von über 10^{25} Jahren gerechtfertigt.

In dieser Arbeit wurde ROSI für zwei Arten Ereignisse eingesetzt: Einzelne Elektronen und zwei Elektronen eines $\beta\beta$ -Ereignisses.

Zur Erzeugung der $\beta\beta$ -Ereignisse diente das Programm decay0 [23], das Werte für die Impulse der Elektronen des $2\nu\beta\beta$ und $0\nu\beta\beta$ Zerfalls in einem bestimmten Energieintervall würfelt und diese Informationen in eine Datei schreibt. Innerhalb eines Energieintervalls wird die Energieverteilung der Energiesumme beider Elektronen des $2\nu\beta\beta$ -Zerfalls

berücksichtigt. Um Rechenzeit zu sparen und dennoch eine ausreichend genaue Simulation zu erhalten, werden die $2\nu\beta\beta$ Ereignisse in Energieintervallen gleicher Ereigniszahl simuliert, die dann bei der Auswertung entsprechend des Anteils des Intervalls am Gesamtspektrum gewichtet werden. Dies hat zusätzlich den Vorteil, dass die Simulation der verschiedenen Intervalle auf verschiedene Prozesse aufgeteilt werden kann. Die im Allgemeinen verwendeten Energieintervalle sind:

2.59 MeV - 2.61 MeV: Skalierungsfaktor: $6.0898 \cdot 10^{-6}$
 2.61 MeV - 2.63 MeV: Skalierungsfaktor: $3.75268 \cdot 10^{-6}$
 2.63 MeV - 2.65 MeV: Skalierungsfaktor: $2.18022 \cdot 10^{-6}$
 2.65 MeV - 2.67 MeV: Skalierungsfaktor: $1.1631 \cdot 10^{-6}$
 2.67 MeV - 2.69 MeV: Skalierungsfaktor: $5.74826 \cdot 10^{-7}$
 2.69 MeV - 2.71 MeV: Skalierungsfaktor: $2.47402 \cdot 10^{-7}$
 2.71 MeV - 2.73 MeV: Skalierungsfaktor: $8.96241 \cdot 10^{-8}$
 2.73 MeV - 2.75 MeV: Skalierungsfaktor: $2.47124 \cdot 10^{-8}$
 2.75 MeV - 3 MeV: Skalierungsfaktor: $4.6555 \cdot 10^{-9}$

Der Skalierungsfaktor gibt den Anteil dieses Energieintervalls am Gesamtspektrum an. Die Intervalle hoher Energie haben zwar nur einen sehr geringen Anteil, müssen aber dennoch genau berechnet werden, da gerade diese mit höchster Wahrscheinlichkeit Ereignisse sind, die mit der gleichen Energie wie $0\nu\beta\beta$ Ereignisse gemessen werden. Da die Rechenzeit für ein Ereignis in der Größenordnung einer Sekunde liegt, ist diese Einteilung in Energieintervalle notwendig, um in realistischer Rechenzeit eine ausreichende Zahl hochenergetischer Ereignisse zu simulieren. In Abbildung 1.4 sind das mit decay0 berechnete Gesamtspektrum und einige skalierte Intervalle dargestellt. Die Zahl der Ereignisse jedes Intervalls beträgt 10^6 , der für die Simulationen wichtige Bereich liegt bei über 2600 keV.

Die Ereignisse werden gleichverteilt innerhalb des CdTe Sensors erzeugt, der nach äußeren Vorgaben (Dicke des Detektors, Anzahl Pixel) in der Simulation erstellt wird. Um die Simulationen für verschiedene Parameter vergleichbar zu halten, wurde versucht die Breite und Länge des Sensors konstant zu halten. Dies ist aber nicht immer möglich, da die Zahl der Pixel ganzzahlig sein muss. Als Basis wurden 256×256 Pixel bei einer Pixelgröße von 110 μm gewählt, was vier Timepixsensoren entspricht, so dass es für einige Pixelgrößen Abweichungen aufgrund von Rundungen gibt. Die Größe des Sensors ist in der Simulation nur für die Interaktionen relevant. Masseunterschiede gehen nicht ein, da die Zahl der simulierten Ereignisse unabhängig von der Sensorform vorgegeben wird. In der Simulation wird angenommen, dass das Sensormaterial homogen ist.

Für einzelne Elektronen wurde kein Zerfallsspektrum verwendet, da die Spektren im relevanten Energiebereich nicht bekannt sind. Einzelne Elektronen wurden daher nur simuliert um die Spuranalyse (Kapitel 3) zu testen, daher wurden diese mit zufälliger

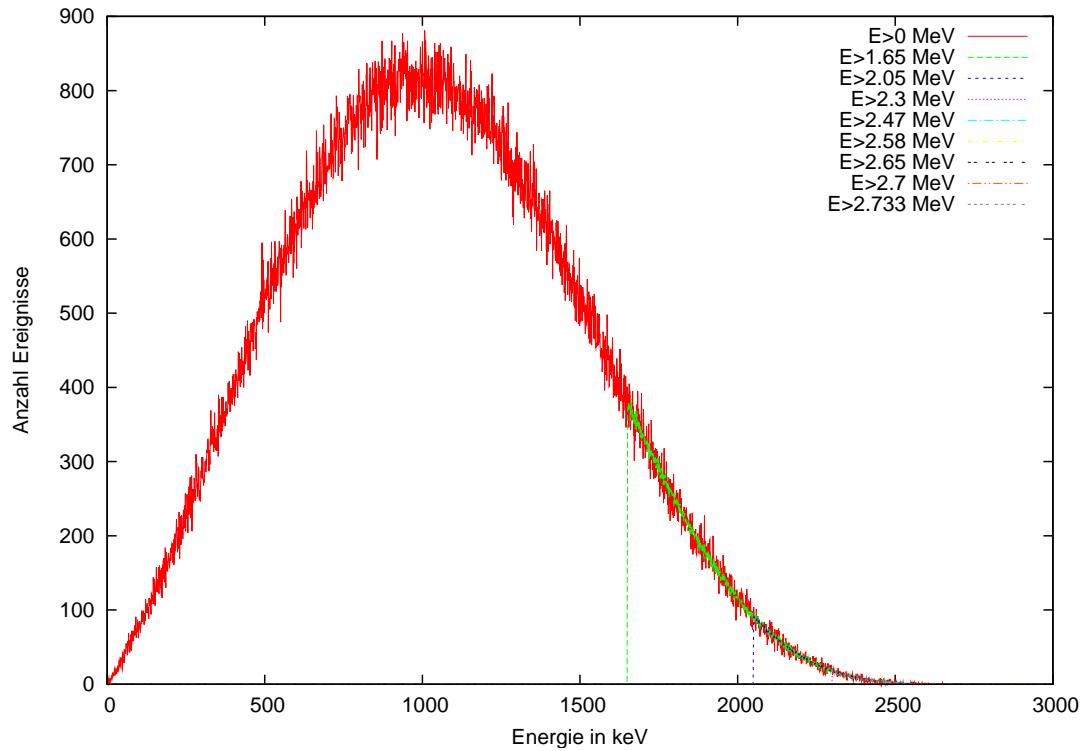


Abbildung 1.4 Verschiedene Energieintervalle des Spektrum des $2\nu\beta\beta$ Zerfalls mit jeweils 10^6 Ereignissen und entsprechend ihres Anteil am gesamten Spektrum gewichtet.

gleichverteilter Richtung und einer Energie von 2803 keV (also etwa dem Q-Wert des $0\nu\beta\beta$ Zerfalls) an einer zufälligen Position im Sensor erzeugt.

Die Simulation berücksichtigt verschiedene physikalische Prozesse und Eigenschaften des Sensors, wie beispielsweise das analoge Rauschen der Elektronik, Umwandlung von Energie und TOT-Schlägen, TOTnoise, Diffusion, Wichtungspotentiale, Drift der Ladungsträger im elektrischen Feld, Form des elektrischen Feld, Erzeugung von Sekundärteilchen. Die für diese Arbeit Wichtigen werden in den Kapiteln 1.4 bis 1.8 genauer erläutert.

Das wichtigste Simulationsergebnis für diese Arbeit ist die Energieverteilung, die der Detektor für ein Ereignis in den einzelnen Pixeln misst, sowie das Histogramm der gesamten Energien, die für die einzelnen Ereignisse eines Energieintervalls gemessen werden. Aus der Energie pro Pixel kann ein Bild der Spur der Ereignisse erzeugt werden, wie sie vom Detektor gemessen werden. Einige Beispiele sind in Abbildung 3.1(a) bis 3.1(d) dargestellt (Seite 41). Diese Bilder sind Grundlage der Spuranalyse in Kapitel 3.

Aus den Histogrammen kann das gemessene Spektrum der $\beta\beta$ Zerfälle berechnet werden indem die einzelnen Histogramme entsprechend den Energieintervallen, und der angenommenen Detektormasse, Messzeit und Halbwertszeit der Zerfälle gewichtet addiert werden. Ein Beispiel ist in Abbildung 1.5 dargestellt. Diese Energieantwortspektren des Timepix (im Folgenden mit Energieantwortspektrum bezeichnet) sind Grundlage für die Berechnung der Sensitivität und Energieauflösung (Kapitel 2) und damit der Optimierung der Sensorparameter (Kapitel 4). Die verwendeten Histogramme wurden in 1 keV Intervalle eingeteilt.

Im Folgenden sollen einige physikalische Grundlagen, die für das Verhalten des Detektors bzw. das Verständnis der Antworten von Bedeutung sind, beschrieben werden.

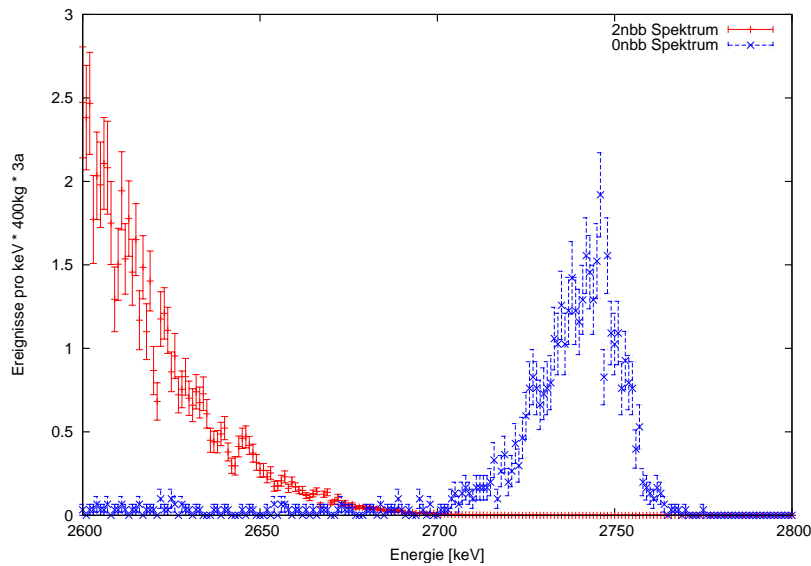


Abbildung 1.5 Simuliertes Energieantwortspektrum des $0\nu\beta\beta$ und $2\nu\beta\beta$ Zerfalls. Für die Halbwertszeit wurden $2.75 \cdot 10^{25}$ Jahre für $0\nu\beta\beta$ und $2.8 \cdot 10^{19}$ Jahre für $2\nu\beta\beta$ gewählt.

1.4 Spannung und Driftzeiten

Eine wichtige Information für die Simulation ist die Geschwindigkeit mit der sich Ladungen durch den Sensor bewegen (ν_e bzw. ν_h , für Elektronen bzw. Löcher). Diese ergibt sich als Produkt aus dem elektrischen Feld am Ort der Ladung und der Mobilität der Ladungsträger (μ_e bzw. μ_h , für Elektronen oder Löcher):

$$\vec{\nu}_e = \vec{E} \cdot \mu_e \quad \vec{\nu}_h = \vec{E} \cdot \mu_h \quad (1.3)$$

Während die Beweglichkeit eine Materialeigenschaft ist und somit im gesamten Sensor konstant, hängt das elektrische Feld bei gegebenem und homogenem Sensormaterial, vom Ort im Sensor x , der Dicke des Sensors d und der Bias-Spannung U ab. Die ROSI-Anwendung zur Simulation Photonenzählender Detektoren der Medipix-Reihe[16] berechnet das Feld E an der Position x bei Spannung U und effektiver Dotierung N_{eff} durch:

$$E(x) = \frac{U}{d} + \frac{2U_D}{d^2}(\frac{d}{2} - x) \quad (1.4)$$

wobei U_D einer Mindestspannung entspricht, die notwendig ist um den gesamten Sensor zu verarmen:

$$U_D = \frac{N_{eff}ed^2}{2\epsilon_0\epsilon_r} \quad (1.5)$$

Diese Methode funktioniert aber nur, wenn $U > U_D$. An der Formel ist zu erkennen, dass eine kleinere Spannung bedeuten würde, dass das elektrische Feld an einem Punkt gegen Null geht oder negativ wird und somit unendliche Driftzeiten erzeugt. Dies widerspricht Messungen des elektrischen Feldes. Einige Messungen sind in Abbildung 1.8 und 1.9 dargestellt. Da U_D quadratisch mit der Dicke des Sensors steigt, die Durchbruchsspannung (welche als Grenze für die maximale Bias-Spannung angesehen werden kann) aber linear, ist es zur Simulation dickerer Sensoren notwendig, eine Formel für das elektrische Feld bei niedrigerer Spannung zu finden.

Die Schwierigkeit besteht darin, dass es wenig veröffentlichte Messungen an vergleichbaren CdTe-Detektoren gibt, die Messungen des elektrischen Feldes aufwendig sind und keine allgemein bekannte Formel existiert. Es soll daher aus den verfügbaren Daten eine möglichst gute Näherung gefunden werden.

Entwicklung allgemeiner Formeln aus den Messdaten Es wurde versucht aus Messdaten des elektrischen Feldes eine empirische Formel zu finden, die das Feld abhängig von x , d und U beschreibt. Die verwendeten Messdaten liegen in Form von Graphen vor, die das elektrische Feld für bestimmte Sensordicken und Bias-Spannungen gegen die Tiefe im Sensor darstellen. Ein Beispiel ist in Abbildung 1.8 dargestellt.

Zunächst wurden versucht eine einfache Funktion empirisch zu finden, die die Graphen möglichst gut beschreibt. Diese soll nur von der angelegten Spannung U und der Tiefe x im Sensor abhängen. Zum Beispiel eine Gerade der Form

$$E(U, x) = a \cdot U \cdot x + b \cdot U \quad (1.6)$$

Die an die Graphen des elektrischen Felds eines Sensors angepassten Funktionen sollen sich dabei nur durch die Werte ihrer Parameter unterscheiden. Also beispielsweise für Daten eines Detektors mit 100V, 200V, 500V Bias-Spannung, die folgenden Funktionen:

$$E(U, x) = a_{100V} \cdot U \cdot x + b_{100V} \cdot U \quad (1.7)$$

$$E(U, x) = a_{200V} \cdot U \cdot x + b_{200V} \cdot U \quad (1.8)$$

$$E(U, x) = a_{500V} \cdot U \cdot x + b_{500V} \cdot U \quad (1.9)$$

Bei allen verwendeten Messdaten stimmte das Integral über die Funktion nicht exakt mit der angelegten Spannung überein. Teilweise, weil die y-Achse (die das elektrische Feld darstellt) in "arbitrary units" angegeben war, teilweise aus unbekannten Gründen, die vermutlich im Messaufbau bzw. in Messungenauigkeiten oder Ungenauigkeiten am Fit an die Messwerte zu finden sind. Um die Daten besser vergleichbar und umrechenbar zu machen, wurde daher für jede Funktion die y-Achse so skaliert, dass die Integrale mit der angelegten Spannung übereinstimmen. Es soll also für einen Sensor der Dicke d gelten:

$$\int_0^d E(U, x) dx = U \quad (1.10)$$

Es wurde dann aus allen Funktionen für einen bestimmten Sensor eine einzige Funktion gemacht, indem für alle Messparameter ein Mittelwert gesucht wurde, beispielsweise aus den Funktionen 1.7 bis 1.9:

$$E(U, x) = \frac{a_{100V} + a_{200V} + a_{500V}}{3} \cdot U \cdot x + \frac{b_{100V} + b_{200V} + b_{500V}}{3} \cdot U \quad (1.11)$$

Diese Funktion sollte dann eine Näherung an alle Messwerte für einen Sensor darstellen. Um mit diesen Funktionen Sensoren beliebiger Dicke darzustellen, wird angenommen, dass die Funktion auch bei $x > d$ noch das elektrische Feld korrekt darstellt, die in die Funktion eingesetzte Spannung aber nicht mehr gleich der angelegten Bias-Spannung ist. Es wird in die Funktion also eine für die Dicke aus den Messwerten äquivalente Spannung U_a eingesetzt. Beispielsweise soll für einen Sensor der Dicke d_2 und angelegter Bias-Spannung U_2 gelten:

$$\int_0^{d_2} E(U_a, x) dx = U_2 \quad (1.12)$$

Aus dieser Gleichung lässt sich bei gegebener Funktion $E(U, x)$ (die aus den Messwerten bestimmt wurde) U_a bestimmen, je nach Funktion analytisch oder numerisch. Somit lässt sich das elektrische Feld eines Sensors beliebiger Dicke d und angelegter Spannung U durch $E(U_a, x)$ angeben, wobei U_a durch Gleichung 1.12 festgelegt ist.

Verwendete Formel Zunächst wurden die Daten einer Messung des elektrischen Feldes eines 1.5 mm dicken CdTe Sensors bei Bias-Spannungen von 100V, 200V, 500V und 220 μm Pixel Pitch verwendet[10][11]. Hierfür wurde die Funktion

$$E(x) = a \cdot x + b + c \cdot e^{-d \cdot x} \quad (1.13)$$

verwendet (die Exponentialfunktion dient der Berücksichtigung des Einflusses des pixelierten Kontakts). Durch Vergleich der verschiedenen Spannungen ist zu erkennen, dass

die Spannung näherungsweise durch

$$E(U, x) = a \cdot U \cdot x + b \cdot U + c \cdot U \cdot e^{-d \cdot U \cdot x} \quad (1.14)$$

in die Funktion eingeht. Für die Parameter der gemeinsamen Funktion ergibt sich dann: $a = 579861.33 m^{-2}$, $b = 228.01 m^{-1}$, $c = 540.31 m^{-1}$, $d = 479.53 V^{-1} m^{-1}$.

Diese Funktion beschreibt die verwendeten Daten gut. Eine gewisse Abweichung bei manchen Datenpunkten, ist mit der verwendeten Methode aber unvermeidbar, da die Integrale der elektrischen Felder in dieser Messung nicht proportional zur angelegten Spannung sind. Da $E(U, x)$ in diesem Fall transzendent ist, werden U_a und die Driftzeiten numerisch berechnet.

Überprüfung der Daten Es ist zu überprüfen inwieweit die Messdaten verlässlich sind und ob die Formel in der Simulation korrekte Werte liefert. Als Test der Formel in der Simulation wurde die Simulation eines ^{241}Am Energieantwortspektrum mit Messdaten verglichen. Dies ist in Abbildung 1.6 dargestellt. Die Messdaten wurden von Ewald Guni gemessen. Im Bereich des Peaks bei etwa 58 keV ist eine Übereinstimmung zu erkennen.

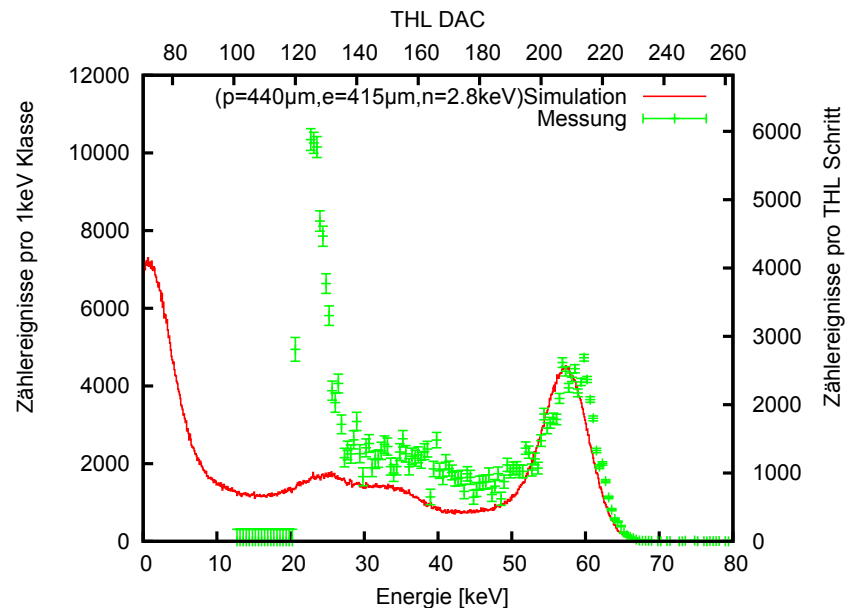


Abbildung 1.6 Messung und Simulation bei 300V, Messdaten von Ewald Guni

Die Abweichungen bei kleineren Energien sind auf Messungenauigkeiten zurückzuführen. Daran ist zu erkennen, dass die Formel zumindest näherungsweise korrekte Driftzeiten liefert. Wäre die korrekte Driftzeit beispielsweise doppelt so groß, so wäre eine deutliche

Abweichung von den Messdaten zu erkennen, wie in Abbildung 1.7 zu sehen ist.

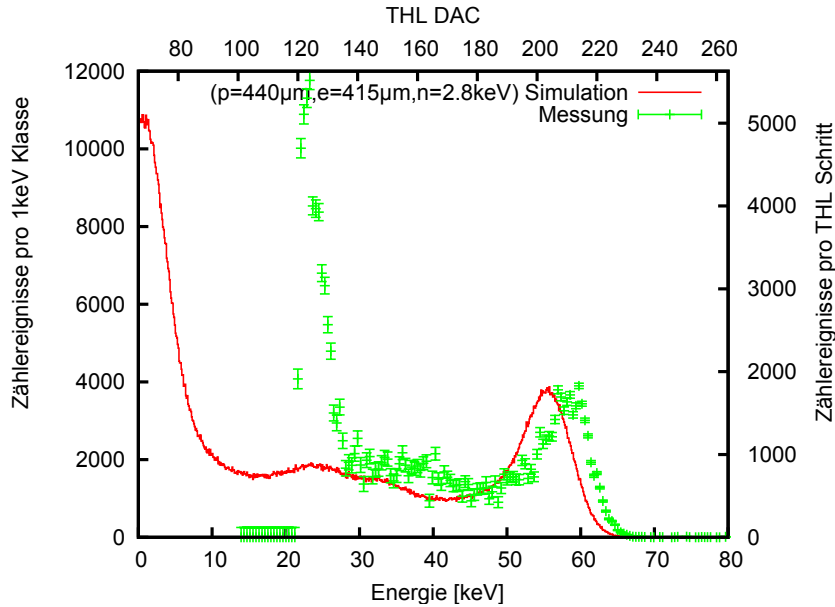


Abbildung 1.7 Messung und Simulation bei 300V, verdoppelte Driftzeiten, Messdaten von Ewald Guni

Um die Verlässlichkeit der Messdaten zu überprüfen, wurden die Daten zweier weiterer Messungen verwendet. Diese sind in Abbildung 1.8 und 1.9 dargestellt. Die Messungen sollen wie folgt bezeichnet werden:

Messung1: 100V, 200V, 500V bei 1,5 mm Sensordicke[10][11]

Messung2: Daten aus Abbildung 1.8, 100V, 200V, 300V, bei 0,5 mm Sensordicke[12]

Messung3: Daten aus Abbildung 1.9, 50V bei 1mm Sensordicke[13]

Um die Daten zu vergleichen wurden alle Graphen durch Geraden angenähert. Von den Daten aus Messung2 abgesehen ist die Abweichung der Messungen von Geraden gering. Bei dieser speziellen Messung wurde für die Gerade nur der gestrichelte Teil verwendet, der in der Abbildung als 'fitted' bezeichnet ist (dieses Bild ist direkt aus [12] entnommen, die gestrichelten Teile sind von dessen Autoren). Die Beschränkung auf diese Teile ist aus mehreren Gründen gerechtfertigt. Eine ausführliche Begründung hierfür ist in [12] zu finden. Ein weiterer Hinweis ist, dass ein Abfall des elektrischen Felds an der Kathode wie er abseits der gestrichelten Teile zu sehen ist, nicht in Messung1 oder Messung3 zu erkennen ist. Mit einem solchen Abfall stimmen auch die Integrale des elektrischen Felds über den gesamten Sensor nicht mit der angelegten Spannung überein. Eine geringe

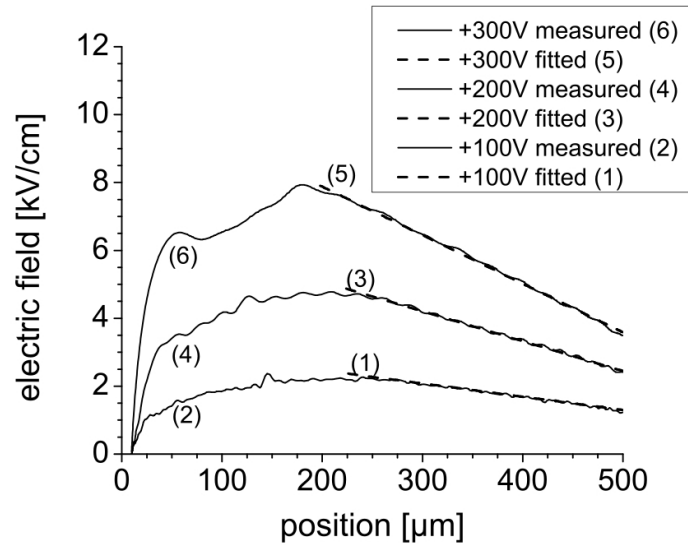


Abbildung 1.8 Messung2, elektrisches Feld eines 0,5mm dicken CdTe-O Sensors, die Anode ist rechts, Bild aus [12]

Skalierung der y-Achse war für jeden Graph notwendig.

Um die verschiedenen Formeln zu vergleichen, wurde aus allen drei Messungen das Feld eines Sensors der Dicke 3mm bei 1,5kV Bias-Spannung berechnet, dies ist in Abbildung 1.10 dargestellt.

Außerdem wurde das Verhältnis der Driftzeiten eines Elektrons mit den verschiedenen Formeln berechnet. Dies ist in Abbildung 1.11 und 1.12 dargestellt, erwartungsgemäß sind die relativen Abweichungen an der Anode am größten.

Es ist wichtig zu bemerken, dass die verschiedenen Messungen nur geringe Gemeinsamkeiten haben. Der Sensor beinhaltet in allen Fällen CdTe und hat ohmsche Kontakte, allerdings handelt es sich um unterschiedliche Detektoren, Messungen von unterschiedlichen Personen mit unterschiedlichen Methoden und abweichendem Verhältnis aus Bias-Spannung und Detektordicke. Dennoch sind die aus ihnen berechneten Felder sehr ähnlich und keine Funktion zeigt grobe Abweichungen, so dass die aus Messung1 berechnete Formel als gerechtfertigte Näherung angesehen werden kann. Sie wird daher im Folgenden in allen Simulationen verwendet, in denen die Spannung unter U_D liegt.

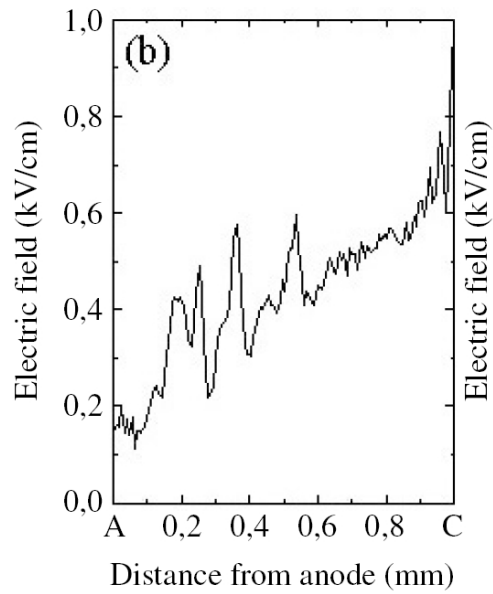


Abbildung 1.9 Messung3, elektrisches Feld eines 1mm dicken CdTe Sensors, Bild aus [13]

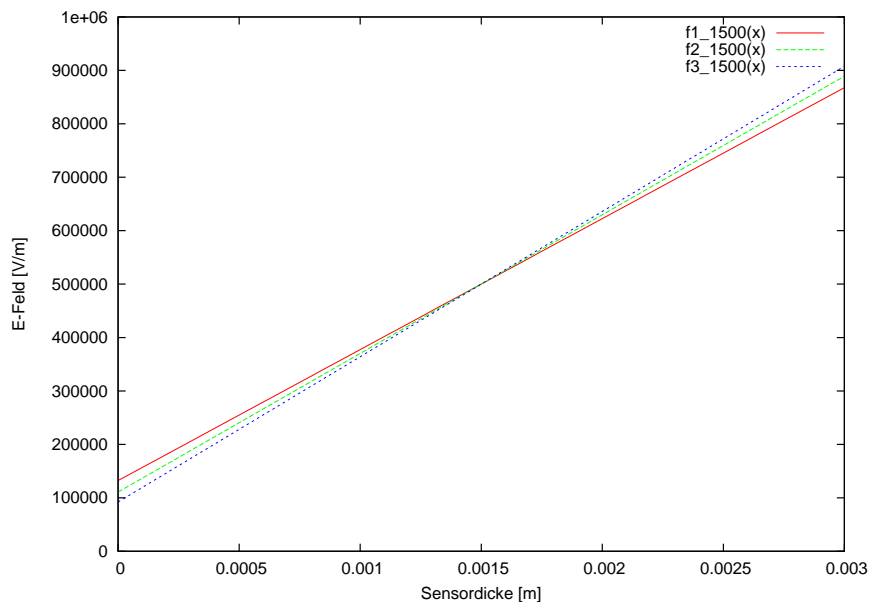


Abbildung 1.10 Elektrische Felder der Funktionen aus Messung1-3 (f1-3) für 1.5 kV Bias-Spannung auf 3mm Sensordicke

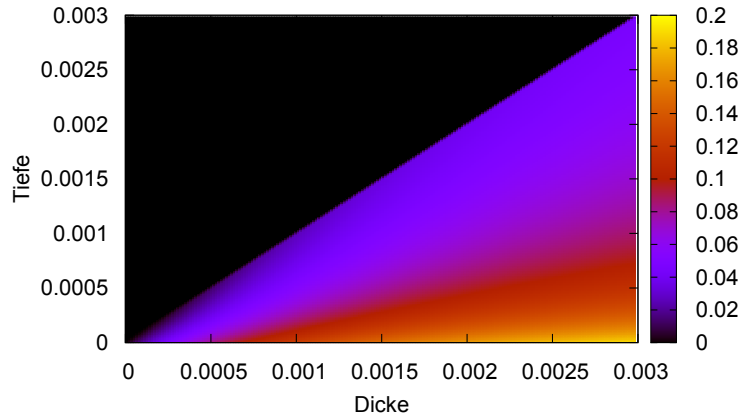


Abbildung 1.11 Farblich dargestellt die relative Driftzeitsteigerung eines Elektrons zwischen der Funktion aus Messung1 und Messung2, in Abhängigkeit der Detektordicke und Tiefe (beides mit der Einheit Meter angegeben) der Startposition des Elektrons

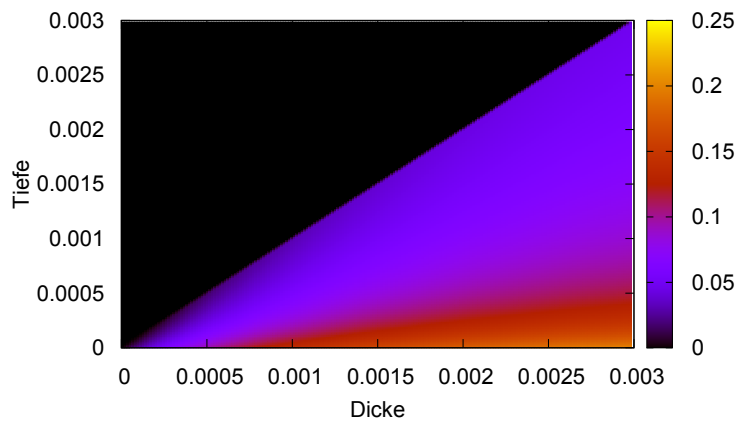


Abbildung 1.12 Farblich dargestellt die relative Driftzeitsteigerung eines Elektrons zwischen der Funktion aus Messung2 und Messung3, in Abhängigkeit der Detektordicke und Tiefe (beides mit der Einheit Meter angegeben) der Startposition des Elektrons

1.5 Charge Sharing

Charge Sharing bedeutet, dass durch die in einem Pixel deponierte Energie, auch in anderen Pixelelektroden Ladung gesammelt wird. Aus Sicht der Messung wird also die Energie, die in einem Pixel deponiert wird, auf mehrere Pixel aufgeteilt.

Die Auswirkungen hängen vom TOTnoise, der Energieschwelle, und der Energie, die verteilt wird, ab. Der Vorteil der Verteilung ist, dass bei Ansprechen mehrerer Pixel das gesamte Rauschen sinkt, da sich dieses herausmittelt. Ein Nachteil ergibt sich durch die Energieabhängigkeit des TOTnoise. Dieser steigt bei geringerer Energie pro Pixel (siehe Kapitel 1.6). Außerdem besteht die Gefahr, dass die durch Charge Sharing in den Nachbarpixeln influenzierte Ladung einer Energie entspricht, die unter der Energieschwelle liegt, und diese Energie somit für die Messung verloren geht. Wie in Kapitel 4 beschrieben, scheint aber der negative Einfluss immer zu überwiegen (bei für dieses Experiment einigermaßen realistischen Werten).

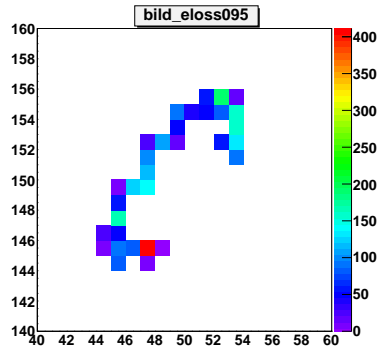
Der Einfluss des Charge Sharing auf das Bild der Spur eines $0\nu\beta\beta$ Zerfalls ist beispielhaft in Abbildung 1.13(a) bis 1.13(c) dargestellt. In jedem Pixel wird eine bestimmte Energie deponiert (Abbildung 1.13(a)), durch Charge Sharing wird die Ladung auch in Pixelelektroden influenziert, in deren Pixel keine Energiedeposition stattfand (Abbildung 1.13(b)), entspricht diese Ladung einer Energie die unter der Energieschwelle liegt, so wird diese Energie nicht gemessen, und die gesamte gemessene Energie des Ereignisses sinkt (Abbildung 1.13(c)).

Das Auftreten von Charge Sharing hat verschiedene Gründe. Für diese Arbeit von Bedeutung sind vor allem diejenigen, die sich durch die Wahl von Sensorparametern beeinflussen lassen, da eine Reduktion des Charge Sharing von Vorteil ist.

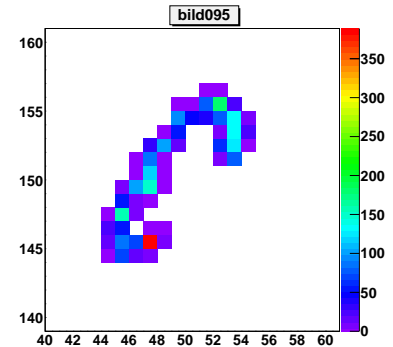
Diffusion Eine punktförmige Ladungswolke wird während des Drifts im Sensor gaußförmig ausgedehnt. Der Diffusionsradius beträgt $\sqrt{2Dt}$, wobei t die Driftzeit der Ladungsträger zur Elektrode und D die Diffusionskonstante des Materials ist [16]. Die Diffusionskonstante berechnet sich nach der Einsteinbeziehung durch $D = \frac{k_B \cdot T \cdot \mu}{q}$.

Repulsion Da die Ladungsträger je nach Vorzeichen zu unterschiedlichen Elektroden driften, besteht eine Ladungswolke entweder aus positiven oder negativen Ladungen, die sich gegenseitig abstoßen. Diese Repulsion sorgt wie die Diffusion für eine zeitabhängige Vergrößerung der Ladungswolke. Bei den in der Simulation verwendeten Modellen steigt der maximale Repulsionsradius je nach Form der Ladungswolke mit \sqrt{t} oder $t^{1/3}$ [16]

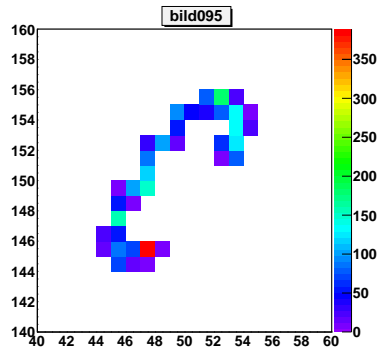
Charge Sharing steigt also durch Diffusion und Repulsion mit der Driftzeit, welche durch dickere Sensoren und niedrigere Spannung steigt.



(a) Es ist die im Pixel deponierte Energie dargestellt



(b) Es ist die in den Pixel gemessene Energie ohne Energieschwelle dargestellt



(c) Es ist die in dem Pixel gemessene Energie bei einer Energieschwelle von 7 keV dargestellt

Abbildung 1.13 simulierte Spur eines $0\nu\beta\beta$ Zerfalls. Es ist für jeden getriggerten Pixel (Spalte, Zeile) die ihm ihm gemessene/deponierte Energie farbcodiert in keV dargestellt.

1.6 TOTnoise

Wie in Kapitel 1.2 beschrieben, wird die Energie pro Pixel in TOT-Schlägen gemessen, aus denen die Energie berechnet werden kann. Diese Messung hat ein gewisses Rauschen, den TOTnoise. Dieser hat einen wesentlichen Anteil am Verhalten des Detektors und ergibt sich aus zwei Beiträgen. Diese sind das unterschiedlichen Verhalten verschiedener Pixel und das Rauschen der einzelnen Pixel.

Unterschiedliches Verhalten verschiedener Pixel Die Energieantwort der einzelnen Pixel ist nicht gleich. Dies führt dazu, dass sich die Energieantwort des Detektors ändert,

je nachdem welche Pixel getroffen werden, was einen Beitrag zum Rauschen leisten kann. In Abbildung 1.15 ist die Messung dieses Rauschens bei einem Siliziumsensor zu sehen (grüne Linie), die Daten stammen von Michael Böhnel[14].

Dieser Rauschbeitrag kann vermieden werden, indem jeder Pixel einzeln kalibriert wird, was auch unbedingt erfolgen sollte, da dieser Beitrag, insbesondere bei hohen Energien pro Pixel, einen großen Anteil am Gesamtrauschen hat. Der genaue Einfluss dieses Beitrags hängt von den restlichen Parametern ab. Es kann aber von einer deutlichen Verschlechterung der Energieauflösung und Sensitivität ausgegangen werden. Beispielsweise zeigt eine Simulation eine Verschlechterung der Energieauflösung von $1,236\%^{+0,031\%}_{-0,035\%}$ auf $3,587\%^{+0,187\%}_{-0,158\%}$. Die Energieantwortspektren sind in Abbildung 1.14 zu sehen.

Im Folgenden wird daher immer davon ausgegangen, dass jeder Pixel des Sensors kalibriert wurde und somit dieser Rauschbeitrag eliminiert ist.

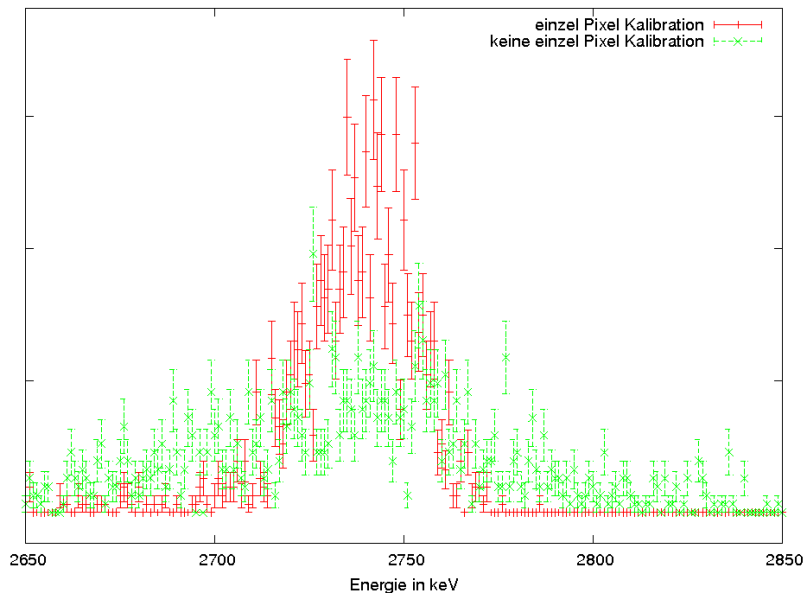


Abbildung 1.14 Simulierte Energieantwortspektren des $0\nu\beta\beta$ Zerfalls bei 3mm Sensordicke, 1,5kV Bias Voltage, 220 μm Pixelgröße.

Rauschen einzelner Pixel Die TOT-Schläge, die ein Pixel liefert, sind mit einem statistischem energieabhängigen Fehler behaftet. Im Allgemeinen gilt, dass der prozentuale Fehler um so kleiner wird, je mehr TOT-Schläge ein Pixel zählt. In Abbildung 1.15 ist dieses Rauschen eines Timepix mit Siliziumsensor zu sehen (rote Linie). Die Daten stammen von Michael Böhnel und dienen als Grundlage für die hier beschriebenen Simulationen. Da die Messung nur über eine begrenzte Anzahl Messpunkte verfügt und

insbesondere nur bis zu einem bestimmten Wert gemessen wurde, ist es notwendig die Daten zu verallgemeinern. Dazu wurde zwischen den Messpunkten linear interpoliert. Über den größten Messwert hinaus wurde der absolute Fehler linear fortgesetzt, bis zu einem bestimmten prozentualen Grenzwert, der dann konstant gehalten wurde. Für die meisten Simulationen wurde 0,8% gewählt, da eine Messung aus [17] nahelegt, dass dieser Wert erreicht wird. Dies ist eine vorsichtige Abschätzung, nach [17] ist sogar anzunehmen, dass der relative Fehler gegen 0% geht, da der absolute Fehler bei höheren Energien konstant bleibt. Allerdings fehlen Messdaten, um dies auch für höhere Energien zu bestätigen. Da der $0\nu\beta\beta$ Zerfall sehr hohe Energien pro Pixel deponieren würde, ist der tatsächliche Grenzwert von nicht zu vernachlässigender Bedeutung. Darauf wird in Kapitel 4.5 genauer eingegangen.

Für die Interpolation wurde für Null TOT-Schläge der gleiche absolute Fehler angenommen wie bei der niedrigsten gemessenen Zahl TOT-Schläge. Dies basiert auf der Annahme, dass das absolute Rauschen bei sehr geringer Energiedeposition in dem Pixel konstant ist, da es durch das analoge Rauschniveau bestimmt wird und nicht bei sinkender Energie kontinuierlich steigt. Der niedrigste Messwert liegt bereits unter der meist verwendeten Energieschwelle von 7 keV, so dass diese Annahme bei den meisten Simulationen keine Auswirkung hat.

Zur Implementierung in die Simulation wird die Energie in die Zahl der TOT-Schläge umgerechnet, die Zahl der TOT-Schläge mit dem entsprechenden Rauschen versehen und dies wieder in Energie zurückgerechnet. Dies geschieht über die Formel

$$TOT = E \cdot a + b + \frac{c}{E - d} \quad (1.15)$$

wobei a, b, c, d Parameter sind, die von Messparametern abhängen. Für die Umrechnung der gezeigten Daten in der Simulation gilt:

$$a = 2.7685 \text{ keV}^{-1}$$

$$b = 85.2238$$

$$c = 113.519 \text{ keV}$$

$$d = 3.30208 \text{ keV}$$

Um den TOTnoise zu minimieren, ist es also am besten, wenn die Energie pro getriggertem Pixel möglichst hoch ist, da der relative TOTnoise bei hoher Energie niedriger ist und wenn möglichst viele Pixel aktiv sind, da sich der Noise so herausmittelt.

Die Energie, die der Sensor misst, ergibt sich als Summe über die Energie der einzelnen Pixel $E = \sum_{i=0}^N E_i$. Der Fehler der einzelnen Pixel beträgt dann ΔE_i und somit ist der gesamte Fehler kleiner oder gleich der Summe der einzelnen Fehler.

$$\Delta E = \sqrt{\sum_{i=0}^N (\Delta E_i)^2} \leq \sum_{i=0}^N \Delta E_i \quad (1.16)$$

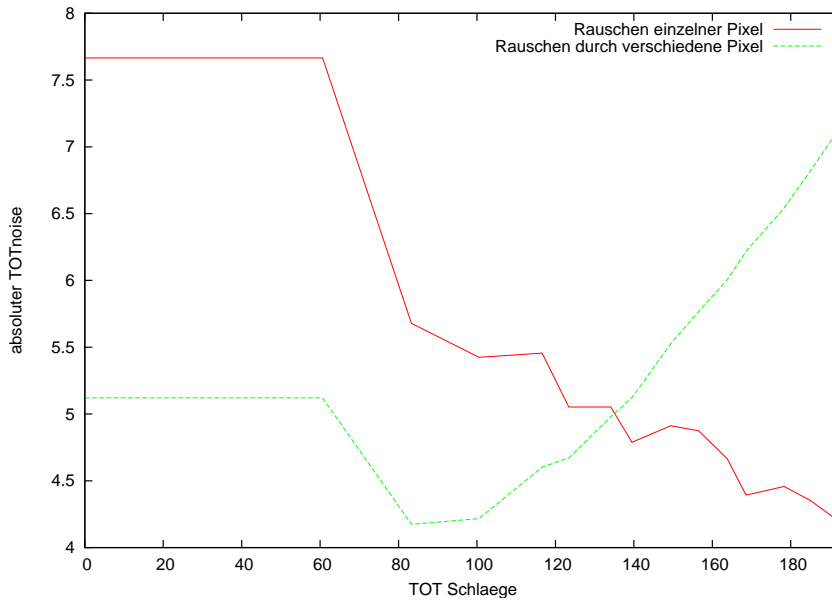


Abbildung 1.15 TOTnoise für einzelne Pixel und der Einfluss des unterschiedlichen Verhaltens verschiedener Pixel. Die Daten wurden von Michael Böhnel mit einem Timepix mit Siliziumsensor gemessen. Der Wert bei Null TOT-Schlägen ist auf den Wert der Messung für die niedrigste Zahl TOT-Schläge gesetzt, zwischen den Messpunkten wurde linear interpoliert. Der absolute TOTnoise auf der y-Achse ΔTOT entspricht einer Standardabweichung.

Nimmt man einen konstanten Fehler pro Pixel an, so geht die Zahl der Pixel mit $\frac{1}{\sqrt{N}}$ in den gesamten Fehler ein.

Die erste Bedingung (hohe Energie pro Pixel) präferiert möglichst große Pixel, die zweite (viele Pixel getroffen) möglichst kleine. Auf die Auswirkungen wird in Kapitel 4.4 genauer eingegangen.

1.7 Wichtungspotential

Die auf den Pixelelektroden pro Zeit influenzierte Ladung $I(t)$ kann mithilfe eines sogenannten Wichtungsfelds \vec{W} und Ramos Theorem [22] aus dem Fluss der Ladungsträger $\vec{F}(t)$, berechnet werden:

$$I(t) = \int \vec{F}(t) \vec{W} dV \quad (1.17)$$

Das Wichtungsfeld ist der negative Gradient des Wichtungspotentials Θ .

$$\vec{W} = -\nabla \Theta \quad (1.18)$$

Zur Berechnung dieses Potentials bezüglich einer Pixelelektrode wird das Potential auf der betrachteten Pixelelektrode auf Eins gelegt und an allen anderen Pixelelektroden und dem Rückseitenkontakt auf Null gesetzt. [16]

Die Ladungsmenge, die ein Ladungsträger influenzieren kann, ist also abhängig vom Wichtungspotential, das er durchläuft. Das Maximum ergibt sich, wenn er das gesamte Potential Θ durchläuft.

In der verwendeten Simulation wird die Änderung des Wichtungspotentials in der Sensorebene vernachlässigt. Verwendet wird nur die zur Sensorebene senkrechte Komponente berechnet nach einer Methode aus [21] für das Potential in der Mitte eines Pixels. Daher soll auch hier nur auf diese Komponente eingegangen werden.

Es folgt, dass die maximale Ladung, die eine Ladungsträgerart (Löcher oder Elektronen) influenzieren kann, vom Ort ihrer Entstehung und dem Wichtungspotential abhängig ist. Nimmt man an, dass keine Ladungsträger vor Erreichen der Kathode/Anode rekombinieren, so lässt sich die influenzierte Ladungsmenge eines am Ort x entstandenen Elektrons/Lochs als

$$\begin{aligned} Q_e(x) &= (1 - \Theta(x))e \\ Q_h(x) &= \Theta(x)e \end{aligned} \tag{1.19}$$

darstellen.

In CdTe haben Elektronen eine wesentlich größere Mobilität als Löcher

$$\begin{aligned} \mu_e &\approx 1100 \frac{\text{cm}^2}{\text{Vs}} \\ \mu_h &\approx 100 \frac{\text{cm}^2}{\text{Vs}} \end{aligned} \tag{1.20}$$

Da außerdem beide vor Erreichen der Anode/Kathode rekombinieren können und die Integrationszeit im Allgemeinen deutlich kleiner ist als die maximale Driftzeit der Löcher, ist der Ladungsverlust bei Elektronen im Allgemeinen geringer. Daher ist es von Vorteil, wenn der Anteil von Q_e an der Gesamtladung möglichst groß ist.

Das Wichtungspotential $\Theta_1(x)$ eines Sensors ist also prinzipiell besser als das eines gleich dicken Sensors (Dicke d) mit Wichtungspotential $\Theta_2(x)$, wenn gilt $\Theta_1(x) \leq \Theta_2(x) \forall x$, da daraus folgt $Q_{e1}(x) \geq Q_{e2}(x) \forall x$. Dies gilt analog, wenn mit Rekombination oder begrenzten Integrationszeiten gerechnet wird.

Sei $p(x)$ die Wahrscheinlichkeit einer Ladung am Ort x erzeugt zu werden, dann ist die durchschnittliche Ladung Q_e/Q_h , die von einer Ladung in einem Detektor der Dicke d

influenziert wird:

$$\begin{aligned} Q_e &= e \int_0^d dx \, p(x)(1 - \Theta(x)) \\ Q_h &= e \int_0^d dx \, p(x)\Theta(x) \end{aligned} \quad (1.21)$$

Nimmt man außerdem an, dass der Ort, an dem Ladungsträger erzeugt werden, gleichverteilt ist, also $p(x) = 1/d$ (da das Sensormaterial homogen ist, und der Pfad von Elektronen keine Vorzugsrichtung hat, ist diese Annahme für intrinsische Zerfälle gerechtfertigt), so folgt für Detektoren der Dicke d_1 und d_2 aus einer Substitution $s_1 = \frac{x}{d_1}$ beziehungsweise $s_2 = \frac{x}{d_2}$:

$$\begin{aligned} Q_{e1} &= e \int_0^1 ds_1 (1 - \Theta_1(s_1 \cdot d_1)) \\ Q_{e2} &= e \int_0^1 ds_2 (1 - \Theta_1(s_2 \cdot d_2)) \end{aligned} \quad (1.22)$$

Daher folgt für Sensoren unterschiedlicher Dicke unter dieser Annahme, dass ein Detektor mit $\Theta_1(x)$ prinzipiell besser ist als einer mit $\Theta_2(x)$, wenn gilt $\Theta_1(x \cdot d_1) \leq \Theta_2(x \cdot d_2) \forall x$.

Einige Beispiele für das Wichtungspotential sind in Abbildung 1.16 und 1.17 dargestellt.

In Abbildung 1.16 ist zu erkennen, dass das Wichtungspotential für kleinere Pixel bei gleicher Sensordicke prinzipiell besser zu sein scheint, da bei zwei verschiedenen Pixelgrößen p_1, p_2 gilt: $\Theta_{p_1}(x) < \Theta_{p_2}(x) \forall x \wedge p_1 < p_2$ und somit $Q_{e(p_1)}(x) \geq Q_{e(p_2)}(x) \forall x \wedge p_1 < p_2$. In Abbildung 1.17 ist $\Theta(x \cdot d)$ dargestellt, hieran ist zu erkennen, dass dicke Sensoren bei gleicher Pixelgröße prinzipiell besser scheinen, da $\Theta_1(x \cdot d_1) \leq \Theta_2(x \cdot d_2) \forall x \wedge d_1 > d_2$. Auf die Auswirkungen wird in Kapitel 4 genauer eingegangen.

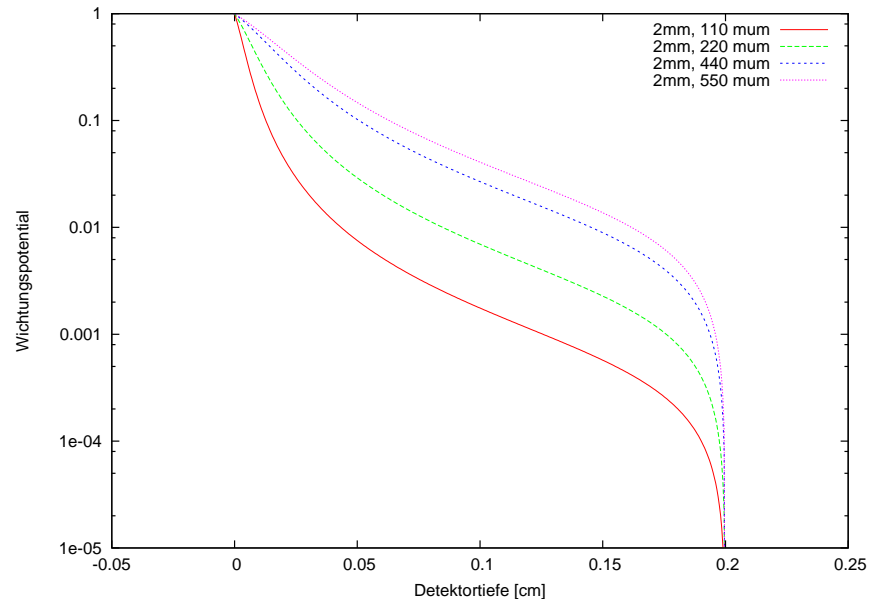


Abbildung 1.16 Wichtungspotential $\Theta(x)$ für verschiedene Pixelgrößen bei einem 2 mm Sensor, berechnet nach einer Methode von Castoldi [21] mit einem Skript von Jürgen Durst

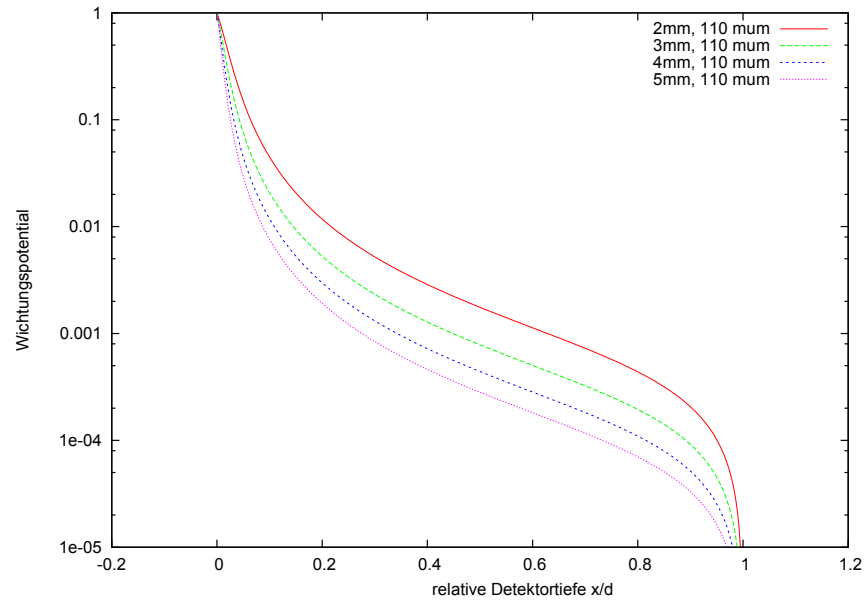


Abbildung 1.17 Wichtungspotential $\Theta(x \cdot d)$ für verschiedene Sensordicken bei einer Pixelgröße von 110 μm , berechnet nach einer Methode von Castoldi [21] mit einem Skript von Jürgen Durst

1.8 Bewegung von Elektronen im Sensor

Die Bewegung von Zerfalls-Elektronen im Sensor entspricht einem nahezu zufälligen Pfad mit zufälligen Wechselwirkungen mit dem Sensor. Dieser Pfad ist energieabhängig, bei größeren Energien ist die durchschnittliche Energieabgabe pro zurückgelegter Wegstrecke geringer, ebenso wie die durchschnittliche Ablenkung vom Pfad. Abbildung 1.18 zeigt beispielhaft den auf eine Ebene projizierten, von ROSI berechneten Pfad eines Elektrons mit einer Energie von 2.8 MeV in CdTe. Der Anfangsimpuls ist parallel zur Ebene.

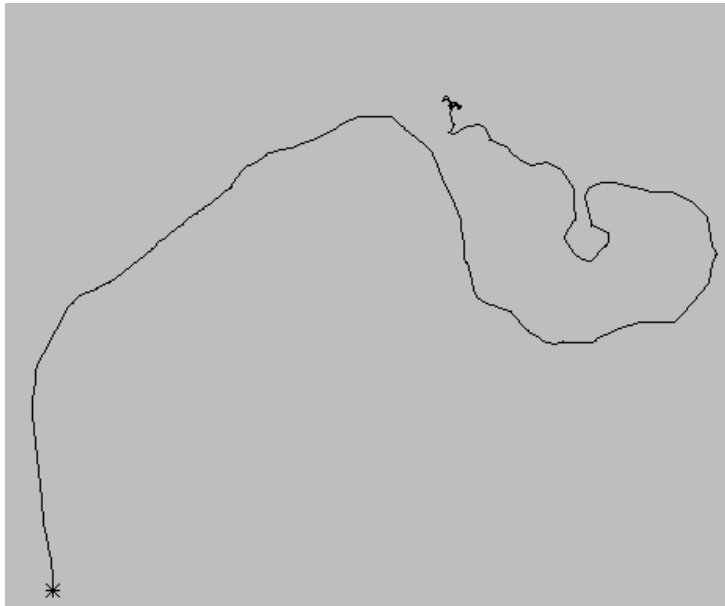


Abbildung 1.18 Zweidimensionale Projektion des Pfads eines Elektrons mit 2.8 MeV in CdTe, mit Rosi simuliert. Der Stern markiert den Ursprung des Pfads. Gut zu erkennen ist dass die durchschnittliche Pfadänderung pro Wegstrecke zunimmt je weiter sich das Elektron bewegt hat, also je weniger Energie es hat.

Als Reichweite der Elektronen soll die Strecke, die sie zwischen ihrer Entstehung und ihrer letzten Energiedeposition zurücklegen, bezeichnet werden. Aufgrund des zufälligen Pfades der Elektronen ist diese Reichweite im Allgemeinen größer als der Abstand zwischen ihrem Entstehungsort und dem Ort der letzten Energiedeposition. Aus [16] ist bekannt, dass das Verhältnis zwischen Reichweite und Abstand für Elektronen in Cadmium bei Energien zwischen 20 keV und 100 keV zwischen 1.8 und 2.3 liegt. Es ist zu erwarten, dass dieses Verhältnis für große Energien kleiner wird, da Elektronen hoher Energie durchschnittlich eine geringere Wegänderung pro zurückgelegter Strecke haben. Die CSDA-Reichweite[18] (continuous slowing down approximation) ist eine Näherung an

die zurückgelegte Strecke. Dabei wird angenommen, dass der Energieverlust pro Strecke dem energieabhängigen Bremsvermögen entspricht und die Reichweite daher dem Integral des reziproken Bremsvermögens über die Energie entspricht [18].

Das Bremsvermögen ist abhängig vom Material und dem gebremsten Teilchen und lässt sich aus der Bethe-Formel [20] mit zusätzlichen Korrekturen berechnen [19].

Die energieabhängige CSDA-Reichweite in CdTe ist in Abbildung 1.19 dargestellt, die Daten stammen aus [15]. Da die Elektronen des $0\nu\beta\beta$ Zerfalls in Cadmium eine Energiesumme von etwa 2.8 MeV haben, ist die Reichweite groß genug um davon auszugehen, dass praktisch immer mehrere Pixel getroffen werden, was eine notwendige Voraussetzung ist, um überhaupt Spuren erkennen zu können. Außerdem ist die Wahrscheinlichkeit dass ein Elektron den Sensor verlässt bevor es seine komplette Energie deponieren konnte, nicht vernachlässigbar, da die durchschnittliche Reichweite der Elektronen nicht klein gegenüber einer praktikablen Sensordicke, von etwa 1 mm - 5 mm, ist.

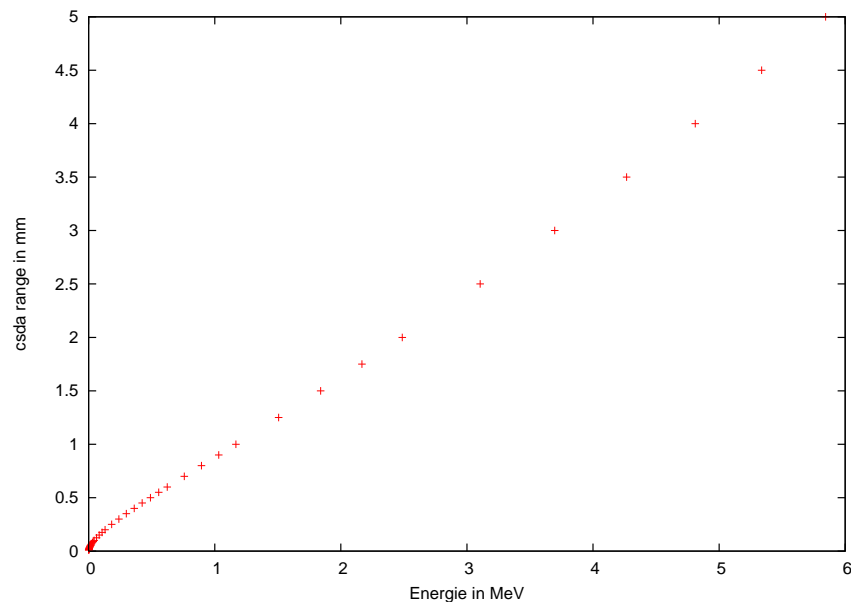


Abbildung 1.19 CSDA-Reichweite für CdTe, Daten aus [15]

2 Datenanalyse

2.1 Sensitivität

Um die Simulationsergebnisse für verschiedene Detektorparameter vergleichen zu können, ist es sinnvoll eine Leistungszahl zu haben, nach der optimiert werden kann. Hierfür wurde eine Sensitivität gewählt, die wie folgt definiert wurde:

Ein Experiment zum Nachweis des $0\nu\beta\beta$ -Zerfalls, mit einem bestimmten Detektor und einer bestimmten Messzeit wird als Ergebnis mit einem bestimmten Konfidenzniveau entweder die Halbwertszeit $T_{\frac{1}{2}lim}$ als untere Grenze für die Halbwertszeit des $0\nu\beta\beta$ -Zerfalls in ^{116}Cd nachweisen, oder die Existenz des Zerfalls. $T_{\frac{1}{2}lim}$ ist die Halbwertszeit auf die das Experiment sensitiv ist. Dies soll im Folgenden mit Sensitivität bezeichnet werden.

Wie bei den Simulationen wird angenommen, dass die Masse des ^{116}Cd konstant bleibt und somit die Zahl der $0\nu\beta\beta$ und $2\nu\beta\beta$ Zerfälle statistisch unabhängig sind. Außerdem wird der restliche Untergrund als unabhängig von der Zahl der $\beta\beta$ Zerfälle angenommen. Daher kann die Zahl der Ereignisse mehrerer Zerfälle als poissonverteilt angenommen werden. Wobei für den Erwartungswert gilt $ev_{ges} = \sum_i ev_i$. Dabei ist ev_i der Erwartungswert der einzelnen Zerfälle.

Wahl eines Energieintervalls Es wird ein Energieintervall gewählt. Alle Ereignisse außerhalb dieses Intervalls werden ignoriert und nur die innerhalb zur Auswertung verwendet. Die Simulationsdaten liegen auf 1 keV gebündelt vor. Um beliebige Energieintervalle wählen zu können wird zwischen den Bins linear interpoliert.

Bei einem gegebenen Experiment (festgelegte Sensorparameter, Messzeit, Zahl der ^{116}Cd Kerne) legt die Wahl des Energieintervalls, in dem gemessen wird, die Detektionseffizienz ϵ (siehe Kapitel 2.3) und den Untergrund bg fest. Betrachtet man alle Energieintervalle, die einen bestimmten Untergrund festlegen, so muss es ein oder mehrere dieser Intervalle geben in denen ϵ maximal ist (größer als in den anderen Intervallen). Es existiert daher eine maximale Detektionseffizienz in Abhängigkeit vom Untergrund $\epsilon(bg)$.

Weiterhin ist der Erwartungswert der (im Energieintervall befindlichen) $0\nu\beta\beta$ Ereignisse ev_0 bis auf eine Abhängigkeit von der Halbwertszeit, durch die Wahl von ϵ festgelegt. Da dieser Wert proportional zur Detektionseffizienz ist, existiert auch hierfür ein Maximum in Abhängigkeit vom Untergrund $ev_0(bg)$.

Die Wahl eines Energieintervalls ist in Abbildung 2.1 am Beispiel eines Energieantwort-

spektrums des $0\nu\beta\beta$ Zerfalls dargestellt. Die Form des Energieantwortspektrums wird durch die Simulationsdaten bestimmt. Durch die Parameter Messzeit, Zahl der Kerne und Halbwertszeit wird lediglich die Skalierung der y-Achse geändert, dabei bleibt die Detektionseffizienz konstant.

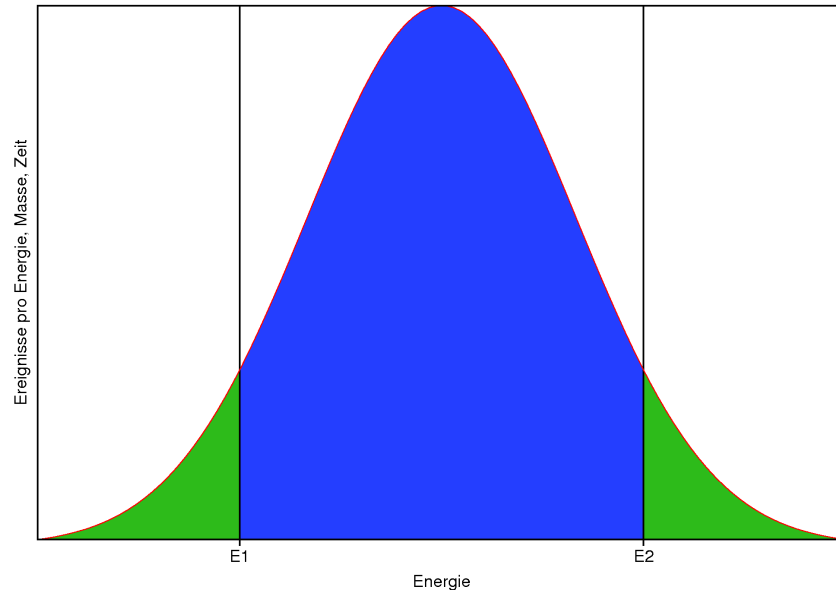


Abbildung 2.1 Skizze eines Energieantwortspektrums des $0\nu\beta\beta$ Zerfalls. Als Energieintervall wurde $E1 < E < E2$ gewählt. Blau markiert sind die Ereignisse, die für die Auswertung verwendet werden ($ev0$), grün die, die verloren gehen ($ev0_v$). Damit ergibt sich die Detektionseffizienz zu $\epsilon = \frac{ev0}{ev0+ev0_v}$.

Berechnen der Halbwertszeit Es gilt das Zerfallsgesetz für die Zahl der nicht zerfallenen Kerne $N(t)$ bei N_0 Kernen zum Zeitpunkt $t = 0$: $N(t) = N_0 e^{-\ln(2)/T_{1/2} \cdot t}$. Und somit für die Zahl der zerfallenen Kerne Z : $Z = N_0(1 - e^{-\ln(2)/T_{1/2} \cdot t})$. Da $t \ll T_{1/2}$ kann Z in erster Ordnung genähert werden: $Z = N_0 \cdot \ln(2)/T_{1/2} \cdot t$. N_0 wird durch Masse und Anreicherung des aktiven Materials im Sensor festgelegt, die Messzeit gewählt. Damit lässt sich die Halbwertszeit, also die Sensitivität, berechnen indem der Erwartungswerts der (im Energieintervall befindlichen) $0\nu\beta\beta$ Ereignisse $ev0$, der zum Nachweis mit dem gewünschten Konfidenzniveau nötig ist, berechnet wird und die Gleichung für $Z = ev0/\epsilon$ nach $T_{1/2}$ aufgelöst wird.

Berechnung des Untergrunds Ein Experiment wird k Ereignisse innerhalb eines bestimmten Energieintervalls liefern, $k \in \mathbb{N}$. Soll dies genügen um den Zerfall mit einem

bestimmten Konfidenzniveau cl nachzuweisen, muss die Wahrscheinlichkeit, k oder mehr Ereignisse zu messen, unter der Annahme, dass der Zerfall nicht existiert, kleiner als $1 - cl$ sein. Das Konfidenzniveau wird hier entweder als Wahrscheinlichkeit oder dem dem dieser Wahrscheinlichkeit entsprechenden Bereich einer Gauß-Verteilung, in σ angegeben. Sei $P(x, y)$ die Wahrscheinlichkeit bei einer Poissonverteilung mit Erwartungswert x , y Ereignisse zu erhalten und bg der Erwartungswert für die Untergrundereignisse. Die Bedingung für k ist dann:

$$\sum_{i=0}^{k-1} P(bg, i) \geq cl \quad (2.1)$$

Im Folgenden soll k den kleinsten Wert bezeichnen, der diese Bedingung erfüllt. Der Wert von bg kann durch die Wahl des Energieintervalls gewählt werden. Ein kleineres Intervall bedeutet weniger Untergrund, allerdings auch eine geringere Detektionseffizienz, da alle Ereignisse außerhalb des Intervalls verloren sind. Wegen Gleichung 2.1 bedeutet ein kleinerer Wert für bg auch einen möglicherweise kleineren Wert für k . Allerdings ist dieser aufgrund von $k \in \mathbb{N}$ nur ab vom Konfidenzniveau abhängigen Werten von bg tatsächlich kleiner. Diese Werte werden im Folgenden mit s_k bezeichnet und lassen sich numerisch berechnen. Sei beispielsweise $cl = 99.73\%(3\sigma)$ dann gilt:

- für $bg < 0.0027037$, $k = 1 (s_1 = 0.0027037)$
- für $0.0027037 < bg < 0.0753478$, $k = 2 (s_2 = 0.0753478)$
- für $0.0753478 < bg < 0.270615$, $k = 3 (s_3 = 0.270615)$

Daher sollte das Energieintervall so gewählt werden, dass die Detektionseffizienz für $bg = s_n (k = n)$ maximiert wird, da ein kleinerer Wert für bg lediglich die Detektionseffizienz verringert und ein größerer k erhöht ($bg > s_n \Rightarrow k \geq n + 1$).

Die Auswertung kann für alle relevanten Werte von $n \in \mathbb{N}$ getrennt durchgeführt werden und dann das beste Ergebnis gewählt werden.

Da gefordert wurde, dass das Experiment entweder den Zerfall oder ein unteres Limit für die Halbwertszeit nachweist, muss die Wahrscheinlichkeit unter der Annahme, dass die Halbwertszeit des Zerfalls kleiner als $T_{\frac{1}{2}lim}$ ist, weniger als k Ereignisse zu messen kleiner gleich $1 - cl$ sein. Die Bedingung für den Erwartungswert der $0\nu\beta\beta$ Ereignisse (innerhalb des Energieintervalls) $ev0$ lautet also:

$$\sum_{i=0}^{k-1} P(ev0_k + s_k, i) < 1 - cl \quad (2.2)$$

Hierbei bezeichnet $ev0_k$ den zu einem Wert von k gehörenden Erwartungswert. Auch dies lässt sich numerisch berechnen.

Bestimmung des Energieintervalls Zunächst wird eine Normalverteilung durch den Peak des $0\nu\beta\beta$ Energieantwortspektrums gefittet. Dies erledigt das Programm zur Auswertung automatisch mithilfe von gnuplot. Es werden mehrmals alle drei Parameter der Normalverteilung nacheinander gefittet und anschließend ein Fit mit allen dreien durchgeführt. Dies soll sicherstellen, dass der Fit ohne manuelle Anpassung möglichst gut zu den Simulationsdaten passt. Einige Fits sind beispielhaft in Abbildung 2.3 bis 2.6 dargestellt. Für die weitere Rechnung ist lediglich der Erwartungswert der Gauß-Verteilung relevant.

Es werden dann alle Energieintervalle ganzzahliger Grenzen (entspricht dem Binning) bei denen die untere Grenze unterhalb des Maximums des Fits, die obere überhalb des Maximums liegt und $bg = s_n(k = n)$ gilt, ausgewertet. Ein Fehler im Fit ist also vernachlässigbar, solange der Fehler des Erwartungswerts der Gauß-Funktion klein gegenüber dem Energieintervall ist. Davon ist auszugehen, da der asymptotische Standardfehler des Erwartungswerts im Allgemeinen sehr gering ist, bei den durchgeführten Simulationen im Bereich von 0.01%, was etwa 0.3keV entspricht, wohingegen das Energieintervall bei allen Auswertungen größer als 30keV war.

Um $bg = s_n$ zu erreichen wird die untere Grenze exakt berechnet, indem die Verteilung des Untergrunds linear interpoliert wird. Dadurch ist eine Detektionseffizienz ϵ_k (siehe Seite 37) festgelegt und der nötige Erwartungswert der Gesamtzahl neutrinoloser Zerfälle durch $ev0_k/\epsilon_k$ berechenbar. Damit lässt sich die Sensitivität mit

$$T_{1/2k} = \frac{\ln(2) \cdot \epsilon_k \cdot N_0 \cdot t}{ev0_k} \quad (2.3)$$

berechnen. Da diese Rechnung für mehrere Energieintervalle durchgeführt wird, ergeben sich auch mehrere Werte für ϵ_k und $T_{1/2k}$. Aufgrund der Definition der Sensitivität reicht es aber das Intervall mit dem größten Wert von $T_{1/2k} \forall k \in \mathbb{N}$ zu verwenden.

Fehlerrechnung Die Simulation berechnet aus vorgegebenen Ereignissen, die Zahl der Ereignisse pro Energiebin in der Detektorantwort. Diese Zahl ist poissonverteilt. Indem die Simulationsergebnisse für jedes Energiebin als Erwartungswert einer Poissonverteilung verwendet werden, kann eine neue Verteilung der Ereignisse gewürfelt werden. Dies entspricht Daten einer neuen Simulation unter der Annahme, dass die Daten von denen ausgegangen wird, die Erwartungswerte pro Energiebin darstellen. Im Folgenden werden die so bestimmten Daten als gewürfelt bezeichnet.

Es findet also nur eine Simulation statt, aus denen Daten entstehen, die mehreren Simulationen unter der genannten Annahme entsprechen. Dies spart Rechenzeit. Um beispielsweise ein komplettes Energieantwortspektrum mit 10^5 Ereignissen pro Energiebereich zu berechnen sind etwa 5-6 h Rechenzeit pro Energiebereich notwendig. Für eine gewürfelte Simulation genügt etwa eine Sekunde.

Dieses Würfeln der Simulationsdaten muss geschehen bevor die Ergebnisse der einzelnen Energieintervalle (dies bezieht sich auf die Energieintervalle zur Simulation aus Kapitel

1.3, nicht die aus der Sensitivitätsberechnung) addiert, bzw. auf Masse und Messzeit skaliert werden. Dies liegt daran, dass diese Skalierungen zwar die Poissonverteilung ändern würden, aber nichts mehr mit der Variationsquelle, den Simulationsdaten, zu tun haben. Aus diesen gewürfelten Simulationsdaten kann wieder eine Sensitivität berechnet werden. Der Fehler der Sensitivität der Simulationsdaten kann dann bestimmt werden indem für eine ausreichend große Zahl von Werten für die Sensitivität überprüft wird innerhalb welchen Bereichs über bzw. unter der Sensitivität aus den Simulationsdaten jeweils 34% dieser Werte liegen.

Daraus folgt, dass die Fehlerbalken meistens asymmetrisch sind und dass in bestimmten Situationen relativ große asymmetrische Fehler auftreten können. Nicht nur bei der Sensitivität, sondern bei allen Ergebnissen, die mit dieser Fehlerrechnung aus den Energieantwortspektren berechnet werden (siehe Kapitel 2.2 und 2.3 für weitere Beispiele, bei denen dies angewandt wird). Dies bedeutet nicht, dass die Simulation fehlerhaft oder mit größeren Fehlern behaftet ist sondern nur dass die Auswertungsparameter (siehe nächster Absatz) und Energieantwortspektren gerade so sind, dass geringe Änderungen an den Energieantwortspektren (beispielsweise durch ein Energiebin mit einem großen Fehler in der Nähe einer möglichen Energiegrenze) einen größeren Einfluss auf bestimmte Ergebnisse haben. Dies ist in Abbildung 2.7 und 2.8 am Beispiel der Detektionseffizienz (Kapitel 2.3) zu erkennen. Es handelt sich um die gleichen Daten, nur mit anderen Auswertungsparametern, und diese Daten wurden ebenfalls für die Sensitivität und Energieauflösung in Abbildung 4.3 und 4.4 verwendet. Lediglich in einem der Fälle, in Abbildung 2.7, sind die gesteigerten Fehler zu beobachten.

Anzahl aktiver Kerne, Messzeit, zusätzlicher Untergrund und Konfidenzniveau Diese Parameter, im Folgenden Auswertungsparameter genannt, müssen zur Berechnung der Sensitivität festgelegt werden. Zusätzlicher Untergrund bedeutet dabei Untergrund, der nicht von den $2\nu\beta\beta$ Ereignissen stammt. Das Energieantwortspektrum des $2\nu\beta\beta$ Zerfalls ist bis auf eine Skalierung bereits durch die Simulation und damit durch die Detektorparameter festgelegt. Aufgrund der Art der Berechnung der Sensitivität, die sich nicht in einer geschlossenen Formel darstellen lässt, ist der Einfluss der Auswertungsparameter keineswegs trivial. Dies bedeutet, dass eine Optimierung der Detektorparameter, immer nur für einen Satz Auswertungsparameter gilt, wie in Abbildung 2.2 zu erkennen ist. Im Folgenden wird ein bestimmter Satz Parameter als Standardparameter verwendet, soweit nicht anders angegeben, erfolgte die Auswertung mit diesen Werten:

Messzeit: $3a$

Anreicherung mit ^{116}Cd : 90% des Cd

Masse CdTe: 400kg

Konfidenzniveau: $99.73\%(3\sigma)$

Die Anzahl der aktiven Kerne ist durch die Masse des CdTe und die Anreicherung bestimmt. Diese Parameter stellen eine Abschätzung des Möglichen bzw. Nötigen dar, da

das Experiment eine gewisse Sensitivität benötigt, aber nicht beliebig teuer werden darf.

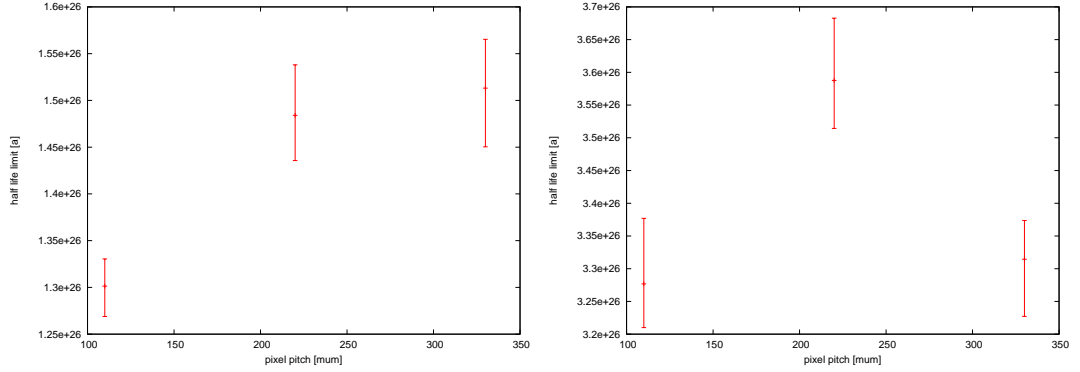


Abbildung 2.2 Sensitivität für einen 3 mm dicken Sensor bei 500 V Bias-Spannung. Links wurde 3σ Konfidenzniveau verwendet, rechts 2σ . Es handelt sich um die gleichen Simulationsdaten, lediglich die Auswertungsparameter wurden mit dem Konfidenzniveau verändert.

2.2 Energieauflösung

Die Energieauflösung wird mithilfe des in Kapitel 2.1 beschriebenen Anpassung einer Normalverteilung an das $0\nu\beta\beta$ Energieantwortspektrum, berechnet. Sie berechnet sich als $\frac{\Delta E}{E}$, wobei $\Delta E = 2\sqrt{2\ln 2}\sigma$ der Halbwertsbreite entspricht. Diese Formel ergibt sich aus der Definition der Halbwertsbreite:

Sei die Normalverteilung $f(x)$, an x_1 maximal und $f(x_2) = f(x_3) = 0.5f(x_1)$, dann ist die Halbwertsbreite als $|x_2 - x_3|$ definiert.

$$\Rightarrow \exp(-0.5(\frac{x_2/3 - x_1}{\sigma})^2) = 0.5 \Rightarrow 2\ln 2 = (\frac{x_2/3 - x_1}{\sigma})^2 \Rightarrow |x_2 - x_3| = 2\sqrt{2\ln 2}\sigma$$

Die Energieauflösung wird in dieser Arbeit nicht für Berechnungen verwendet. Sie dient lediglich zur Erklärung des Einflusses verschiedener Effekte auf die Sensitivität, wie in Kapitel 4 deutlich wird. Dies liegt daran, dass für die Berechnungen direkt die Energieantwortspektren der Detektorantwort auf den $0\nu\beta\beta$ Zerfalls verwendet werden können, und diese mehr Information beinhalten.

Die Fehlerrechnung der Energieauflösung wird zusammen mit der Fehlerrechnung für die Sensitivität durchgeführt, indem die Energieauflösungen der gewürfelten $0\nu\beta\beta$ Energieantwortspektren berechnet werden, und überprüft wird innerhalb welchen Bereichs über bzw. unter der Energieauflösung aus den Simulationsdaten jeweils 34% dieser Werte liegen.

Diese Rechnung berücksichtigt also lediglich statistische Abweichungen jedoch keine Fehler, die durch eine systematische Abweichung des fits vom tatsächlichen Energieantwortspek-

trum entstehen, insbesondere wenn das Energieantwortspektrum keine Gauß-Form mehr hat. Diese Abweichung ist aber im allgemeinen sehr gering. Dies ist beispielhaft in Abbildung 2.3 bis 2.6 dargestellt.

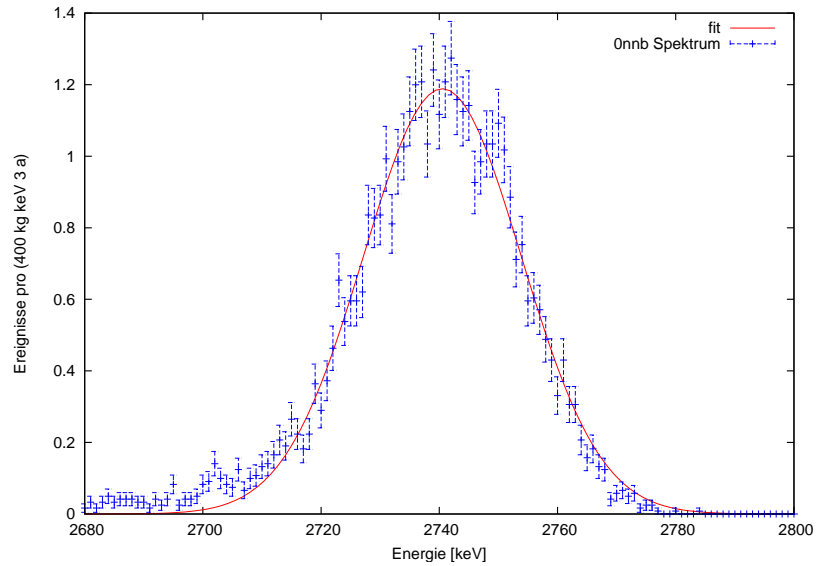


Abbildung 2.3 Gauß-fit an ein $0\nu\beta\beta$ Energieantwortspektrum eines Detektors der Sensordicke 3 mm bei 220 μm Pixelgröße, 1.5 kV Bias-Spannung und 8000 simulierten Ereignissen. Der asymptotische Standardfehler der Fitparameter liegt unter 0.9%

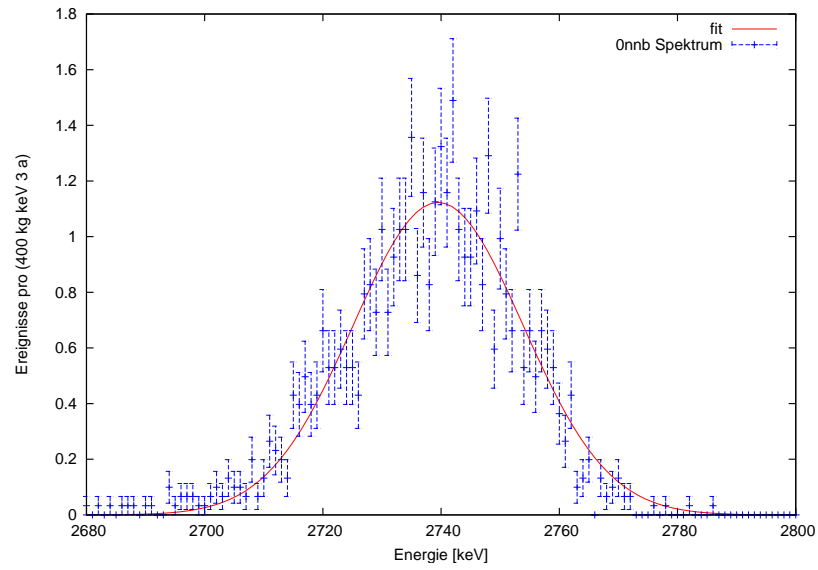


Abbildung 2.4 Gauß-fit an ein $0\nu\beta\beta$ Energieantwortspektrum eines Detektors der Sensordicke 3 mm bei 220 μm Pixelgröße, 1.5 kV Bias-Spannung und 2000 simulierten Ereignissen. Der asymptotische Standardfehler der Fitparameter liegt unter 1.6%

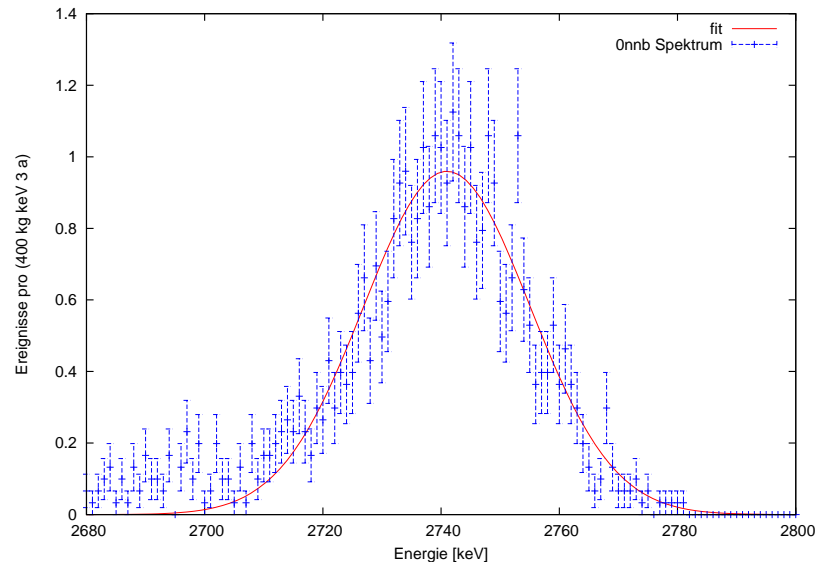


Abbildung 2.5 Gauß-fit an ein $0\nu\beta\beta$ Energieantwortspektrum eines Detektors der Sensordicke 3 mm bei 440 μm Pixelgröße, 1.5 kV Bias-Spannung und 2000 simulierten Ereignissen. Der asymptotische Standardfehler der Fitparameter liegt unter 1.8%

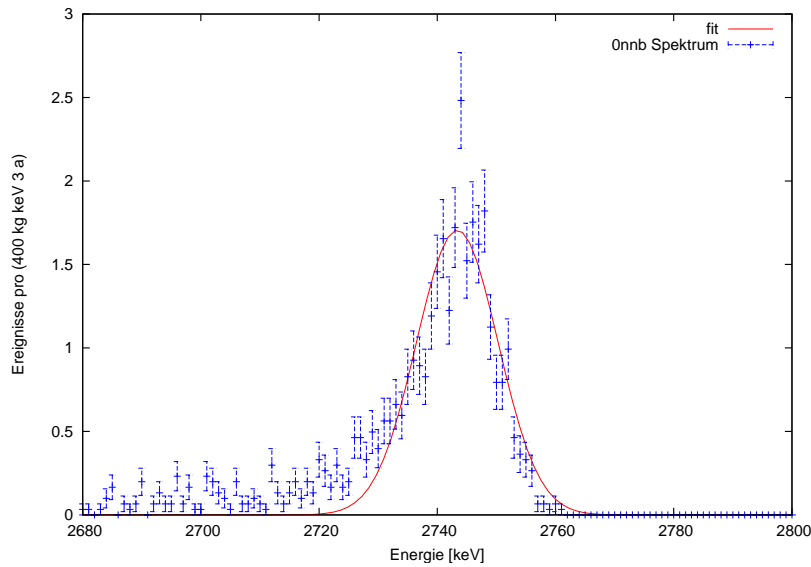


Abbildung 2.6 Gauß-fit an ein $0\nu\beta\beta$ Energieantwortspektrum eines Detektors der Sensordicke 3 mm bei 440 μm Pixelgröße, 1.5 kV Bias-Spannung, 2000 simulierten Ereignissen und verringertem Grenzwert des TOTnoise. Der asymptotische Standardfehler der Fitparameter liegt unter 2.2%

2.3 Detektionseffizienz

Wie in Kapitel 2.1 beschrieben, wird die Detektionseffizienz zur Berechnung der Sensitivität verwendet. Sie gibt an, welcher Teil der $0\nu\beta\beta$ Zerfälle im Messbereich liegt (siehe Abbildung 2.1), also für das Experiment von Nutzen ist. Da die Detektionseffizienz durch die Wahl von optimalen Schnitten festgelegt wird, ist sie von den Auswertungsparametern und den Detektorparametern abhängig. Es ist daher nicht möglich "die" Detektionseffizienz eines Detektors anzugeben und ihr Nutzen beschränkt sich hauptsächlich darauf, das Zustandekommen der Sensitivität zu erklären. Es soll daher im Folgenden eine Abschätzung gezeigt werden, welche Detektionseffizienz zu erwarten ist.

Dies ist in Abbildung 2.7 und 2.8 dargestellt. Wie später gezeigt, werden Pixel größer als 300 μm wahrscheinlich keine Verwendung finden, weswegen sich die Detektionseffizienz bei Standardparametern etwa im Bereich von 45% und 65% befinden wird.

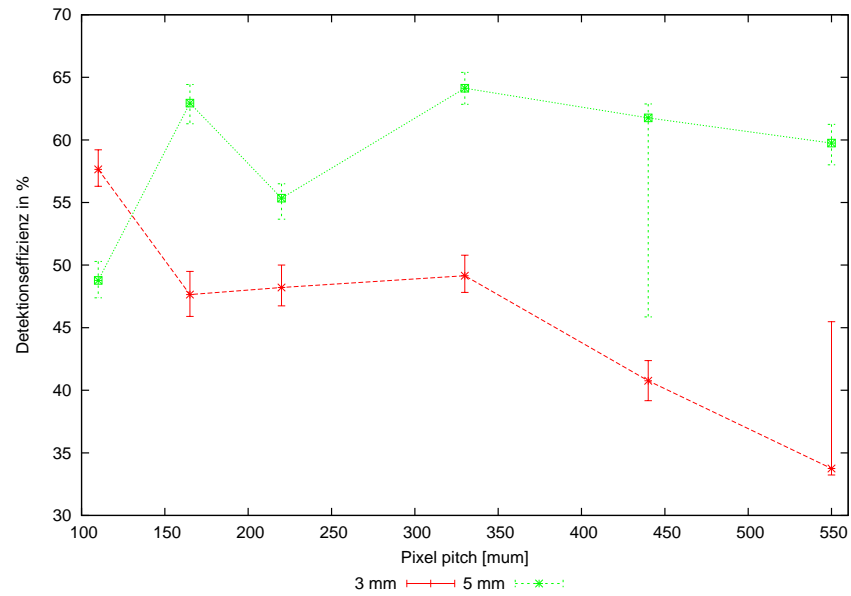


Abbildung 2.7 Detektionseffizienz für Sensordicken von 3 mm und 5 mm, und verschiedene Pixelgrößen bei einem Bias-Spannung von 500V/mm·Sensordicke

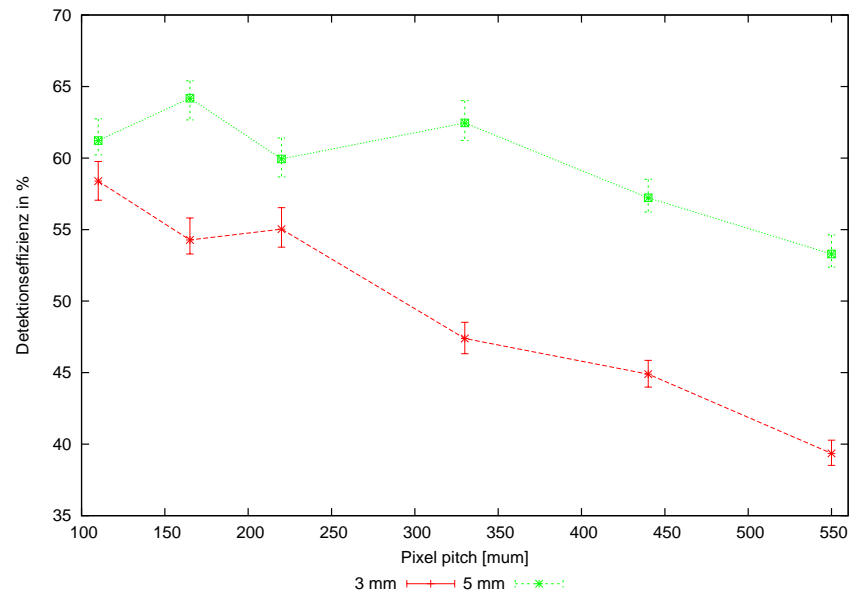


Abbildung 2.8 Detektionseffizienz für Sensordicken von 3 mm und 5 mm, und verschiedene Pixelgrößen bei einer Bias-Spannung von 500V/mm·Sensordicke, mit einem zusätzlichen konstanten Untergrund von 0.001 Ereignissen pro (kg keV a)

3 Spuranalyse

Der wichtigste Grund für den Einsatz von pixelierten Detektoren ist die Untergrundunterdrückung durch Identifikation der Teilchen anhand ihrer Spuren im Sensor. Das Ziel ist möglichst viele der Ereignisse zu identifizieren, die nicht von einem $\beta\beta$ Zerfall stammen, bzw. die $\beta\beta$ Ereignisse möglichst sicher zu identifizieren. Myonen und Alphateilchen sind relativ einfach zu erkennen, da diese sehr charakteristische Signaturen hinterlassen, die sich stark von denen von Elektronen unterscheiden. Auf Myonen und Alpha Spuren wird daher in dieser Arbeit nicht weiter eingegangen. Wesentlich schwieriger zu erkennen sind die Spuren einzelner Elektronen.

Hinweise zu Bezeichnungen In diesem Kapitel spielt die Energie, die in den einzelnen Pixeln gemessen wurde, eine große Rolle, da die Spuranalyse anhand dieser Daten durchgeführt wird. Also nicht die Energie, die tatsächlich in einem Pixel deponiert wurde, sondern was nach Effekten wie Charge Sharing, Rekombination, TOTnoise und dem Einfluss der Energieschwelle, vom Detektor gemessen wird. Wenn von der Energie von Pixeln oder der Energie von Bereichen des Bildes gesprochen wird, bezieht sich dies daher immer auf diese messbare Energie. Der Begriff Energiedeposition bezieht sich auf die tatsächlich deponierte Energie. Da diese nicht gemessen wird, kann sie nicht zur Spuranalyse verwendet werden, ist aber nützlich das Entstehen des Bildes zu erklären. Aus einer hohen Energiedeposition folgt meist auch eine hohe gemessene Energie, aus einer niedrigen Energiedeposition eine niedrige gemessene (siehe Kapitel 1.4 bis 1.8 für die Zusammenhänge).

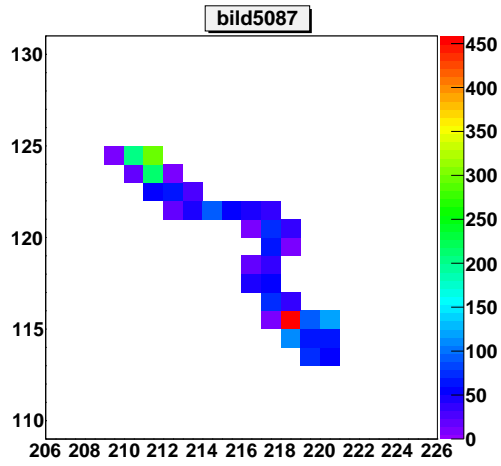
Die Schwierigkeit der Unterscheidung von $0\nu\beta\beta$ und Ereignisse und einzelnen Elektronen ist in Abbildung 3.1(a) bis 3.1(d) zu erkennen. Die einzelnen Elektronen werden im Folgenden auch als "single" bezeichnet.

Das Ereignis in Abbildung 3.1(a), sieht aus wie bei einem $\beta\beta$ Ereignis zu erwarten ist. Es existieren zwei Enden mit hoher Energie, die vermutlich der Ort sind, an dem die Bahn der Elektronen endet. Die Enden sind durch einen dünnen Abschnitt mit Pixeln niedriger Energie verbunden, der vermutlich von der Bahn der Elektronen direkt nach ihrer Entstehung stammt.

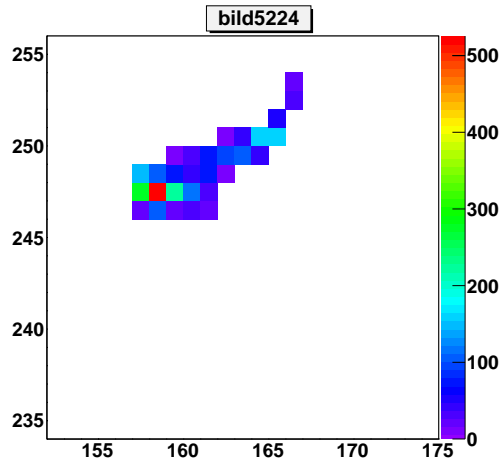
Auch Abbildung 3.1(b) sieht aus wie es für ein einzelnes Elektron zu erwarten ist, es gibt nur einen Bereich, in dem viel Energie gemessen wurde, vermutlich der Endpunkt der Bahn. Die Spur hat einen dünnen Anfang dessen Pixel nur wenig Energie enthalten, vermutlich der Ort, an dem das Elektron entstanden ist.

Was über das $\beta\beta$ Ereignis in Abbildung 3.1(a) gesagt wurde, ließe sich auch über Abbildung 3.1(d) sagen, nur dass es sich dabei um die Spur eines einzelnen Elektrons handelt, diese Erklärung der Bahn also falsch wäre. Ähnliches gilt für Abbildung 3.1(c), lediglich der eine Pixel höherer Energie an der Position (110,40) weist darauf hin, dass es sich um zwei Elektronen handelt, ansonsten ließe sich auch hier die Beschreibung des einzelnen Elektrons in Abbildung 3.1(b) anwenden.

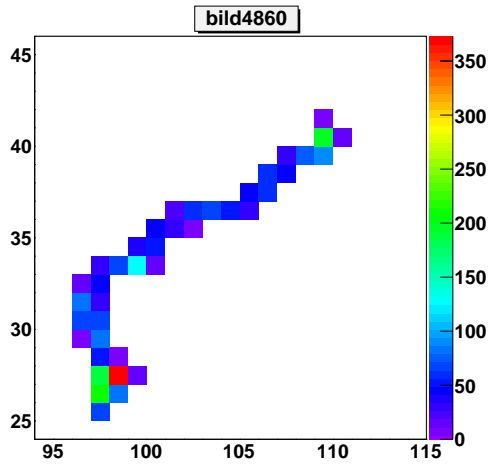
Es soll ein Verfahren entwickelt werden welches anhand der Informationen des Detektors über ein Ereignis entscheiden kann, ob es sich um ein einzelnes Elektron oder ein $\beta\beta$ Ereignis handelt. Wie an den Bildern zu erkennen, ist nicht zu erwarten, dass dies immer möglich ist. Aufgrund der zufälligen Bahn der Elektronen und der Tatsache, dass über ihre Bahn nur die Informationen zur Verfügung stehen, die der Detektor liefert (insbesondere handelt es sich um eine zweidimensionale Projektion der dreidimensionalen Bahn), besteht immer eine Unsicherheit über ihren tatsächlichen Weg. Für die Entwicklung der Spurerkennung wurden fast ausschließlich Simulationsdaten von Sensoren mit einer Pixelgröße von 110 μm verwendet. Soweit nicht anders angegeben, sind daher alle Werte und Abbildungen aus Simulationen mit dieser Pixelgröße entstanden.



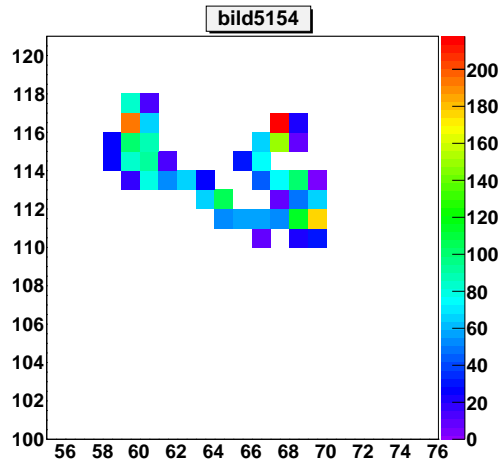
(a) Spur eines $0\nu\beta\beta$ Ereignis



(b) Spur eines β Ereignis



(c) Spur eines $0\nu\beta\beta$ Ereignis



(d) Spur eines β Ereignis

Abbildung 3.1 Beispiele für die Detektorantwort auf $0\nu\beta\beta$ Ereignisse und einzelne Elektronen (β Ereignis). Es ist für jeden getriggerten Pixel (Spalte, Zeile) die ihm gemessene Energie farbcodiert in keV dargestellt.

3.1 Spuranalyse mit einem neuronalem Netz

Für das Experiment ist zunächst nicht die genaue Bahn der Teilchen von Bedeutung, sondern lediglich, um was für Teilchen es sich bei einem Ereignis handelt. Es wird daher bei dieser Methode nicht versucht, die Bahn zu rekonstruieren, sondern lediglich das Bild zu bewerten. Anhand dieser Bewertung soll entschieden werden, ob das Ereignis als einzelnes Elektron der $\beta\beta$ Ereignis eingestuft wird. Dazu werden zunächst n Kriterien festgelegt (aktuell gilt $n = 10$), die sich jeweils als eine Zahl darstellen lassen und aus dem Bild berechnet werden. Damit ist es möglich, aus jedem Bild einen n -dimensionalen Vektor zu berechnen, der dann bewertet werden kann, indem aus ihm eine Zahl berechnet wird. Optimalerweise würde dies die Ereignisse vollständig trennen, also beispielsweise jedem Vektor eines einzelnen Elektrons eine Zahl kleiner Null zuweisen, jedem Vektor eines $\beta\beta$ Ereignis eine über Null.

Für diese Bewertung bietet sich ein künstliches neuronales Netz an, das zunächst an bekannten Vektoren trainiert werden kann, um dann unbekannte zu bewerten. Hierfür wurde die Fast Artificial Neural Network Library (FANN)[24] verwendet, welche in C++ implementiert werden kann.

Es ist wichtig zu bemerken, dass es in dieser Arbeit lediglich um eine untere Grenze des Machbaren geht. Es sind weitere Kriterien denkbar und auch die verwendeten können noch verbessert werden. Es ist auch wahrscheinlich, dass die verwendeten Parameter des neuronalen Netzes noch verbessert werden können. Aber diese Verbesserungen werden mehr Zeit benötigen.

Funktionsweise eines künstlichen neuronalen Netzes Es soll hier nur auf die wesentliche Funktionsweise eines künstlichen neuronalen Netzes eingegangen werden, nicht auf alle möglichen Varianten und deren Auswirkungen.

Ein neuronales Netz besteht im wesentlichen aus drei Schichten.

- Eingabeschicht: Eingabe der zu bearbeitenden Werte, in diesem Fall also n Einheiten
- Ausgabeschicht: Ausgabe der errechneten Werte, in diesem Fall also eine Einheit
- versteckte Schicht: Eine oder mehrere Ebenen Neuronen, die die Ein- und Ausgabeschicht verbinden.

Ein einfaches Beispiel ist in Abbildung 3.2 dargestellt. Dieses Netz hat zwei Eingabeeinheiten, in der versteckten Schicht zwei Ebenen Neuronen mit drei bzw. zwei Neuronen, und eine Ausgabeeinheit.

Die Form des Netzes, also die Anzahl der Ein- und Ausgabeeinheiten, die Anzahl der Ebenen und Neuronen der versteckten Schicht, ist von außen vorgegeben und ändert sich

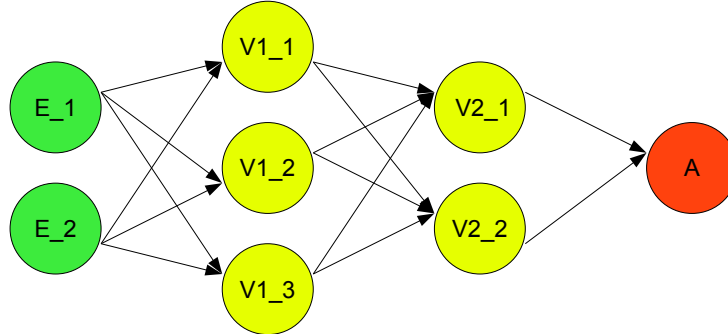


Abbildung 3.2 Struktur eines einfachen Neuronalen Netzes. Die versteckte Schicht besteht aus zwei Ebenen mit drei bzw. zwei Neuronen

nicht während des Trainings.

Jedes Neuron der versteckten Schicht funktioniert prinzipiell gleich und unabhängig von den anderen. Es verfügt über Verbindungen zu anderen Einheiten, entweder zu anderen Neuronen, oder zu Einheiten der Ein- und Ausgabeschicht. Diese Verbindungen sind entweder Eingabe oder Ausgabe und haben eine bestimmte Gewichtung, die während des Trainings festgelegt wird. Außerdem besitzt jedes Neuron eine Aktivierungsfunktion. Diese berechnet aus den Eingaben einen Wert der dann an die Ausgabe geht. Die Ausgabeneinheiten besitzen ebenfalls eine Aktivierungsfunktion.

Wird beispielsweise in dem Netz aus Abbildung 3.2 jedem Neuron die Aktivierungsfunktion $f(x)$ zugewiesen, wobei x die Summe der Eingaben ist, und bezeichnet $w_{U_1-U_2}$ die Gewichtung der Verbindung zwischen Einheit U_1 und U_2 , so berechnet sich die Ausgabe als

$$A = f(\sum_i w_{V2_i-A} f(\sum_j w_{V1_j-V2_i} f(\sum_k w_{E_k-V1_j} E_k)))$$

Das Training dient dazu die Gewichtungen der Verbindungen festzulegen. Für diese Anwendung findet überwachtes Lernen statt, das Netz erhält Eingaben mit einem bekannten Ergebnis und die Verbindungen werden je nach Abweichung der Ausgabe vom Ergebnis nach einer Lernregel angepasst. Die hier verwendete Lernalgorithmus heißt RPROP und ist standardmäßig in FANN integriert. Dies kann wiederholt werden bis ein bestimmtes Kriterium erfüllt ist, beispielsweise bis eine bestimmte Abweichung von den bekannten Ergebnissen unterschritten ist, oder eine bestimmte Zahl Lernprozesse stattgefunden haben. Hierbei bezeichnet eine Epoche einen Lernprozeß am gesamten Trainingsdatensatz. Ziel dieses Trainings ist es, die Informationen aus den bekannten Daten, möglichst gut auf neue Daten verallgemeinern zu können.

Die Wahl der Aktivierungsfunktion, der Form des Netzes und der Lernregel hängt von

dem zu lösenden Problem ab. Einfache Probleme mit wenigen Parametern können mit wenigen Ebenen und Neuronen gelöst werden, schwierigere mit mehr Parametern benötigen im Allgemeinen mehrere Ebenen und viele Neuronen. Ist das Netz zu einfach kann es das Problem nicht erfassen, ist es zu kompliziert neigt es zu Übertraining, passt sich also speziell auf die Lerndaten an und kann schlecht verallgemeinern.

Was genau die optimale Wahl für die Struktur des Netzes ist, lässt sich nicht vorher-sagen, es muss im Allgemeinen ausprobiert werden. Für das Problem der Unterschei-dung zwischen den Spuren durch 10 Kriterien hat sich eine versteckte Schicht mit 5 Ebenen bewährt, die jeweils zwischen 800 und 10 Neuronen haben, beispielsweise 200 – 200 – 100 – 50 – 25. Außerdem wurde als Aktivierungsfunktion eine symmetrische Sigmoid-Funktion gewählt (standardmäßig in FANN integriert) mit $y = \frac{2}{1+\exp(-2 \cdot s \cdot x)} - 1$. Wobei x die Eingabe, y die Ausgabe und s ein Parameter der Funktion ist, der mit steep-ness bezeichnet wird. Die Alternativen wurden aber nicht ausführlich genug untersucht um von einem Optimum sprechen zu können.

Zusammenfassung der in für diese Arbeit meist verwendeten Parameter:

Eingabeeinheiten:	10
Ausgabeeinheiten:	1
Ebenen der versteckten Schicht:	5
Neuronen pro Ebene der versteckten Schicht:	800-10
Aktivierungsfunktion versteckte Schicht:	symmetrische Sigmoid
Aktivierungsfunktion Ausgabeeinheit:	symmetrische Sigmoid
Steepness versteckte Schicht:	0.3
Steepness Ausgabeeinheit:	0.3
Lernfunktion:	RPROP
Abbruchkriterium:	Verschlechterung des Fehlers an einem unabhängigen Datensatz in vier aufeinanderfolgenden Epochen

3.2 Kriterien

Die Kriterien müssen als eine Zahl dargestellt werden können, wie beispielsweise die Zahl der getriggerten Pixel. Die Verteilung dieses Kriteriums für die einzelnen Bilder sollte so sein, dass es möglich ist, die Spuren einzelner Elektronen zu erkennen und da-bei möglichst wenig $\beta\beta$ Ereignisse fälschlicherweise als einzelne Elektronen eingeordnet werden.

Dies ist gut an den Integralen über die relative Häufigkeit eines Kriteriums zu erkennen. In Abbildung 3.3 sind links die Integrale für das Kriterium "Anzahl der getriggerten Pi-xel" dargestellt, rechts die relative Häufigkeit als Histogramm. Als Breite der Intervalle

der Histogramme wurde immer 1% des höchsten vorkommenden Werts des Kriteriums gewählt. Die y-Achse stellt die relative Häufigkeit, die x-Achse die Anzahl der getriggerten Pixel dar. Würde man beispielsweise alle Bilder mit $x > 42$ als Ereignis eines einzelnen Elektrons einordnen, so würde dies einen Verlust von 2.49% der $\beta\beta$ Ereignisse bedeuten, aber auch eine Reduktion des Untergrundes einzelner Elektronen um 16.16%. Einige der Kriterien sind allgemein anwendbar, wie z.B. die Zahl der getriggerten Pixel. Diese können direkt auf die Spuren für verschiedene Energiesummen oder Pixelgrößen angewendet werden. Die Zahl ändert sich zwar mit der Pixelgröße, aber die Bewertung der Zahlen wird von dem Netz vorgenommen, dass daher lediglich an der gleichen Pixelgröße trainiert werden muss. Andere Kriterien wie z.B. die Linienanzahl (siehe Seite 49) müssen speziell darauf angepasst werden, was die Vergleichbarkeit der Spurerkennung für unterschiedliche Pixelgrößen erschwert. Im Folgenden werden die einzelnen Kriterien beschrieben.

Anzahl der getriggerten Pixel	Seite 45
Schwerpunktsabstand	Seite 46
Startenergie2 und Startenergie3	Seite 46
Startlänge	Seite 48
Hochenergieabstand	Seite 48
Niedrigenergieflächen	Seite 48
Linienanzahl	Seite 49
Dünne Spur (Variante 1 und 2)	Seite 53

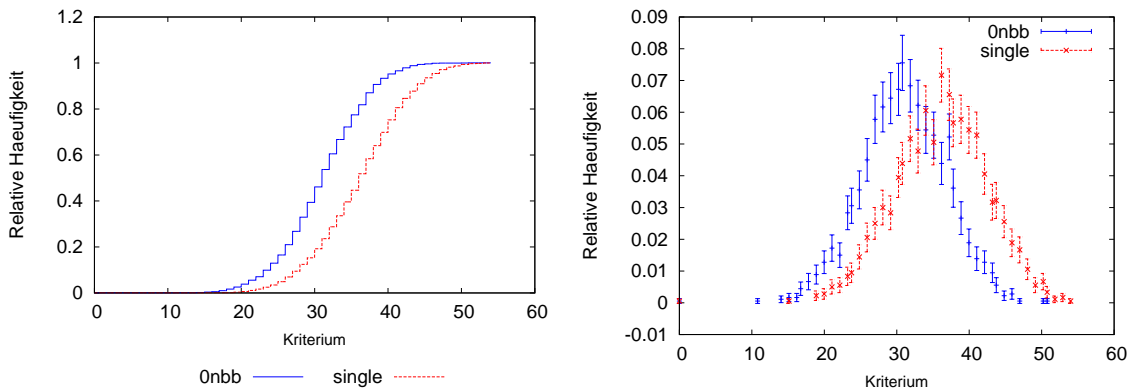


Abbildung 3.3 Histogramme über der Zahl der getriggerten Pixel. Links wurde über die relative Häufigkeit integriert. Einheit des Kriteriums ist Pixel.

Anzahl der getriggerten Pixel Dies ist die Anzahl der Pixel, in denen eine Energie oberhalb der Schwelle gemessen wurde. Die Energiedeposition pro Pixel steigt mit abnehmender Energie des Elektrons. Da bei einem Elektron nur ein Teilchen mit hoher Energie vorhanden ist, während sich bei zwei Elektronen die gleiche Energie auf zwei Teilchen verteilt, deponiert ein Ereignis mit zwei Elektronen im Durchschnitt mehr Energie pro Pixel. Da die Gesamtenergie in einem Bild im Durchschnitt identisch ist, ist die Zahl der getriggerten Pixel bei einem Elektron im Durchschnitt höher. Dies ist in Abbildung 3.3 zu erkennen.

Schwerpunktsabstand Dies ist der Abstand in Pixeln zwischen dem geometrischen und energiegewichteten Schwerpunkt eines Bildes in der Sensorebene.

Da die mittlere freie Weglänge mit der Energie des Elektrons sinkt, haben die Pixel am Ende der Spur eine im Durchschnitt höhere Energiedeposition. Dies führt dazu, dass bei der Spur eines Elektrons, die durchschnittliche Energie je Pixel im Durchschnitt zunimmt (niedrige Energie am Startpunkt, hohe Energie am Endpunkt), während sie bei zwei Elektronen, wenn man das Bild als eine Spur betrachtet, zunächst abnimmt und dann wieder zunimmt. Der Anfang so einer Spur ist dabei immer der Endpunkt eines Elektrons und führt über den Startpunkt beider Elektronen zu einem weiteren Endpunkt. Daher ist dieser Schwerpunktsabstand bei einem Elektron im Durchschnitt größer. Dies ist in Abbildung 3.4 zu erkennen.

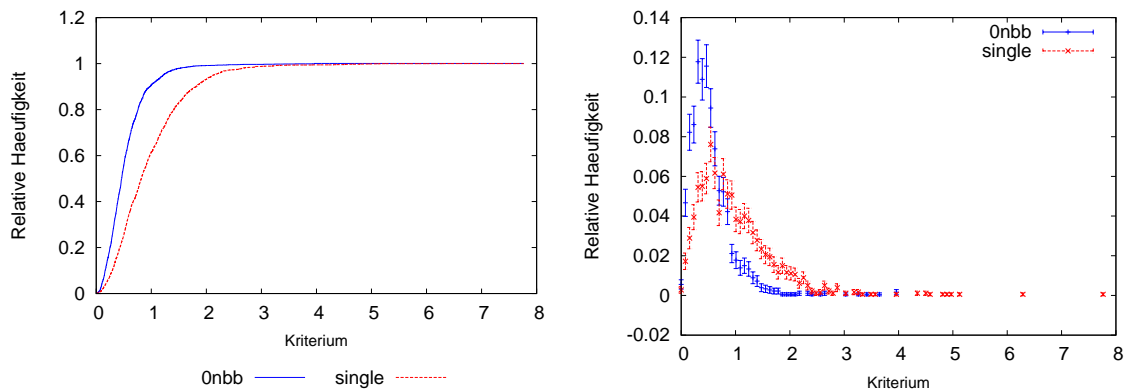


Abbildung 3.4 Histogramme über den Schwerpunktsabstand. Links wurde über die relative Häufigkeit integriert. Einheit des Kriteriums ist Pixel.

Startenergie2 und Startenergie3 Es wird in der Spur nach einem Pixel gesucht, an dem nur ein weiterer Pixel anliegt, an welchem wieder nur ein weiterer liegt. Die Energiesumme in keV der ersten beiden ist Startenergie2, die von allen dreien Startenergie3. Sollte diese Spur nicht gefunden werden oder die Energie größer als 999 keV sein, wird

die Energie jeweils auf diesen Wert gesetzt. Eine solche Spur mit niedriger Energie tritt bei einzelnen Elektronen deutlich häufiger auf und hat, falls sie auftritt, bei einzelnen Elektronen im Durchschnitt eine niedrigeren Energie. Dies ist der Grund warum die Energie auf einen hohen Wert gesetzt wird, wenn keine solche Spur gefunden wird: So ist es möglich einen Teil der Ereignisse als Einzelelektronen Ereignisse zu identifizieren ohne dabei viele $\beta\beta$ -Ereignisse zu verlieren. Falls mehrere dieser Spuren gefunden werden, wird nur der kleinste Energiewert verwendet. Abbildung 3.5 und 3.6 zeigen ein Beispiel dafür. Der Sprung bei $x = 999$ keV kommt von der Energiegrenze bei 999 keV. Dieser wurde aus Gründen der Übersichtlichkeit im nicht integrierten Histogramm weggelassen.

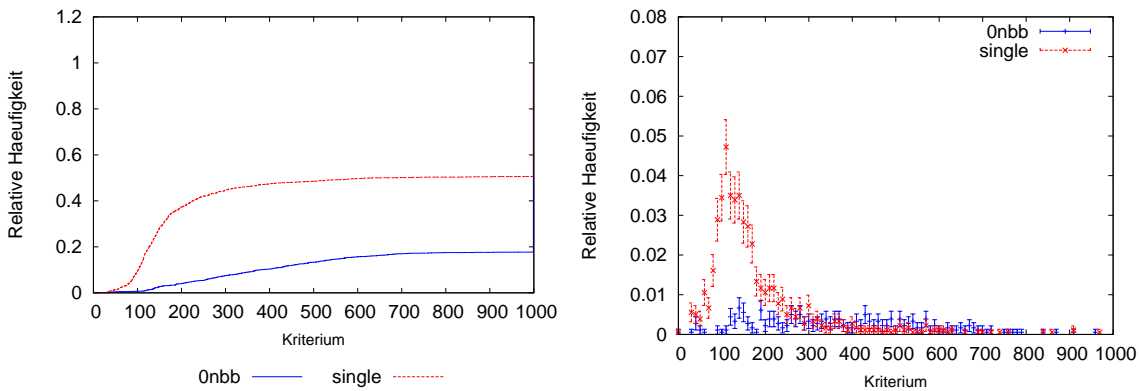


Abbildung 3.5 Histogramme über die Startenergie2. Links wurde über die relative Häufigkeit integriert. Einheit des Kriteriums ist keV.

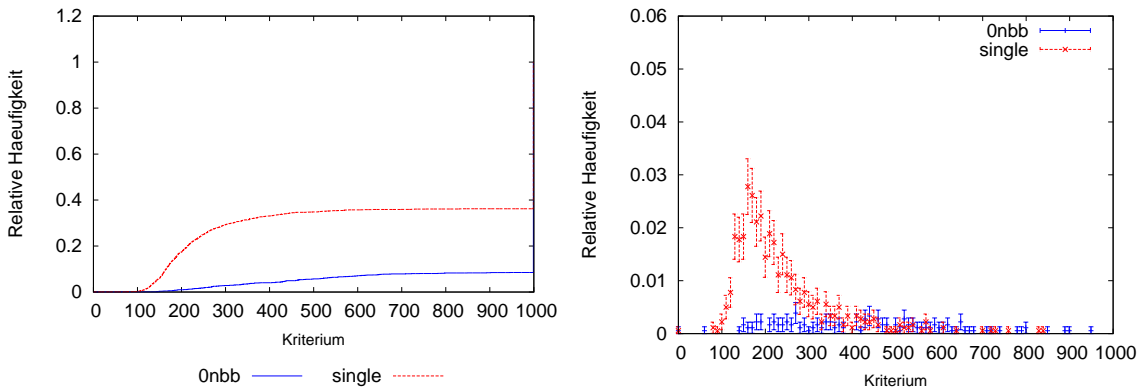


Abbildung 3.6 Histogramme über die Startenergie3. Links wurde über die relative Häufigkeit integriert. Einheit des Kriteriums ist keV.

Startlänge Hierfür wird wieder nach einem Pixel gesucht, an dem nur ein weiterer Pixel anliegt, an dem wieder nur ein weiterer anliegt, usw. Das Kriterium ist die Anzahl der so gefundenen zusammenhängenden Pixel. Diese Zahl ist bei den Spuren einzelner Elektronen im Durchschnitt größer, siehe Abbildung 3.7.

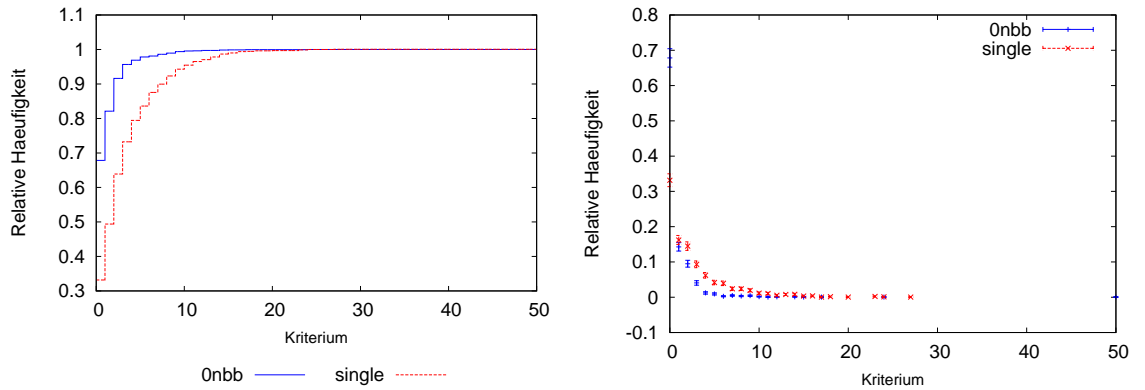


Abbildung 3.7 Histogramme über die Startlänge. Links wurde über die relative Häufigkeit integriert. Einheit des Kriteriums ist Pixel.

Hochenergieabstand Dies ist der maximale Abstand (in Pixel) zwischen Pixeln, deren Energie über einem bestimmten Wert liegt. Erwartungsgemäß ist dieser Wert für $\beta\beta$ Ereignisse durchschnittlich größer. Die Wahrscheinlichkeit eine hohe Energiedeposition zu erhalten ist bei Elektronen mit geringer Energie größer, diese legen aber nur noch eine geringe Entfernung zurück. Dies schränkt den Hochenergieabstand bei dem Bild eines Elektrons ein. Die zwei Elektronen eines $\beta\beta$ Ereignisses können bereits einen gewissen Abstand haben, bevor ihre Energie soweit gesunken ist, dass sie mit hoher Wahrscheinlichkeit, die für dieses Kriterium nötige Energie deponieren. Sollten keine zwei Pixel gefunden werden, die genug Energie haben, so wird dem Kriterium der Wert Null zugewiesen, da die Wahrscheinlichkeit, dass dies auftritt bei einem Elektron höher ist: Hohe Energiedepositionen finden im Allgemeinen erst am Ende des Pfads eines Elektrons statt und bei einem $0\nu\beta\beta$ Ereignis gibt es zwei solcher Enden, da es auch zwei Elektronen gibt.

Dieses Kriterium muss an die Pixelgröße angepasst werden, da die Energie großer Pixel durchschnittlich höher ist. Das Histogramm dieses Kriteriums ist in Abbildung 3.8 zu sehen. Die genaue Form der Histogramme hängt sehr stark von der gewählten Energiegrenze ab, in Abbildung 3.8 wurde 250keV gewählt.

Niederenergieflächen Dies ist die Zahl der Pixel, bei denen die Summe aus ihrer Energie und der Energie aller Nachbapixel (also maximal neun Pixel) unter einem bestimm-

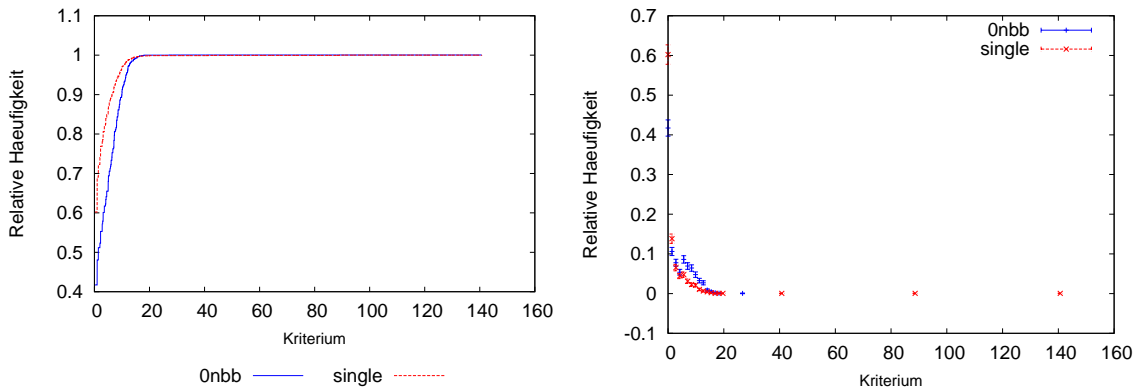


Abbildung 3.8 Histogramme über den Hochenergieabstand. Links wurde über die relative Häufigkeit integriert. Einheit des Kriteriums ist Pixel.

ten Wert liegt. Da Elektronen mit hoher Energie weniger Energie pro Pixel deponieren und auch eine dünnere Spur erzeugen, ist diese Zahl bei einzelnen Elektronen im Durchschnitt größer, wie in Abbildung 3.9 zu erkennen ist. Auch dieses Kriterium muss an die Pixelgröße angepasst werden, da bei größeren Pixeln auch automatisch eine größere Fläche betrachtet wird.

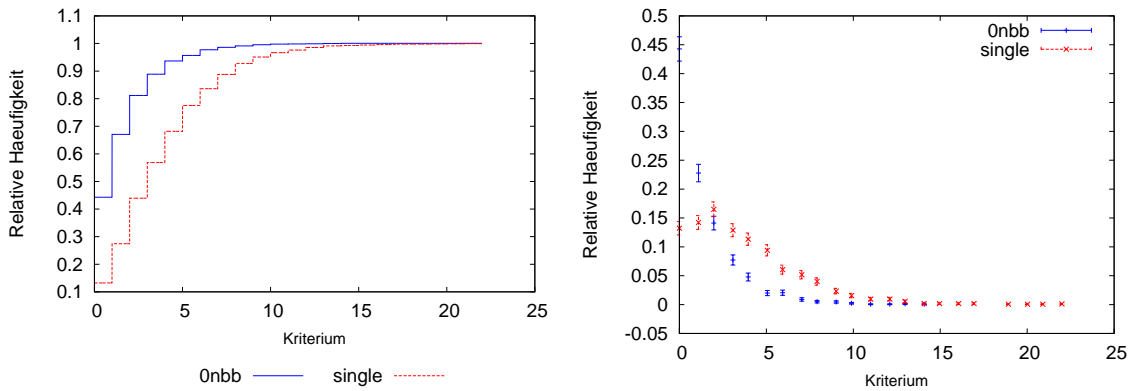


Abbildung 3.9 Histogramme über die Niedrigenergieflächen. Links wurde über die relative Häufigkeit integriert. Einheit des Kriteriums ist Pixel.

Linienanzahl Für dieses Kriterium wird nach einem möglichst langen, geraden Abschnitt in der Spur gesucht, der an einem möglichen Startpunkt der Spur eines Elektrons liegt, also dem Beginn der Spur eines einzelnen Elektrons. Das Kriterium ist die Zahl

der gefundenen Linien. Prinzipiell sollte dies daher fast nur bei Spuren einzelner Elektronen zu finden sein. Da dieses Kriterium aber im Gegensatz zu beispielsweise der Zahl der aktiven Pixel nicht direkt aus der Spur ausgelesen werden kann, sondern eine eigene Mustererkennung erfordert, ist das Auslesen dieses Kriteriums nicht beliebig genau. Insbesondere erfordert es die Wahl mehrerer Parameter, und muss daher immer speziell auf den Detektor angepasst werden. Dabei ist nicht garantiert, dass eine gute Anpassung immer möglich ist. Der Vergleich von Abbildung 3.11 und 3.12 zeigt sowohl den Nachteil als auch den Vorteil dieses Kriteriums. Bei schlechter Anpassung der Parameter ist das Ergebnis sehr schlecht, bei guter Anpassung kann es sehr gut sein, verglichen mit den anderen Kriterien. Diese Bilder wurden erzeugt indem das Kriterium auf 110 μm angepasst wurde und dann auf eine Pixelgröße von 110 μm und 220 μm angewandt.

Zunächst wird nach einem möglichen Startpunkt gesucht, der folgende Bedingungen erfüllen muss (alle Pixel mit einer Energie größer als die Schwelle werden darauf überprüft) :

- die Energie in dem Pixel liegt unterhalb eines bestimmten Werts
- der Pixel hat maximal vier getriggerte direkte Nachbapixel, liegt also am Rand einer Spur
- von diesem Pixel verläuft die Spur nur in eine Richtung

Um die letzte Bedingung zu überprüfen, wird ein kartesisches Koordinatensystem betrachtet, bei dem der Pixel auf (0,0) liegt und die Orientierung der x- bzw. y-Achse der Orientierung der Pixel entspricht. Es wird ein Quadrat bestimmter Größe um den Pixel herum betrachtet, und überprüft wie viele Pixel in welchem Quadranten liegen, wobei der Ursprung nicht mitgezählt wird und die Achsen jeweils zu zwei Quadranten gehören. Um die Bedingung zu erfüllen, darf jeder Quadrant außer einem, nur eine bestimmte Anzahl Pixel K_1 beinhalten. Außerdem dürfen zwei gegenüberliegende Quadranten nicht beide mehr als eine bestimmte Anzahl Pixel K_2 beinhalten.

Anschließend werden alle möglichen Endpunkte gesucht, deren einzige Bedingung ist, dass sie sich in einem Quadrat bestimmter Größe um den Startpunkt herum befinden, und überprüft ob die Linie zwischen Start- und Endpunkt größer als ein Mindestwert ist und ob sie gültig ist.

Seien $(x_{\text{start}}, y_{\text{start}})$ und $(x_{\text{end}}, y_{\text{end}})$ die Koordinaten des Start- und Endpunktes. Es werden alle Pixel der Koordinaten (x,y) mit $x \in \{\min(x_{\text{start}}, x_{\text{end}}) - 1; \max(x_{\text{start}}, x_{\text{end}}) + 1\} \wedge y \in \{\min(y_{\text{start}}, y_{\text{end}}) - 1; \max(y_{\text{start}}, y_{\text{end}}) + 1\}$ und ihr Abstand d von der durch Start- und Endpunkt definierten Geraden berechnet. Sie werden dann abhängig von d , ihrer Energie E und dem gewählten Parameter d_{erlaubt} , in folgende Gruppen eingeteilt:

- $E > 0 \wedge d < d_{\text{erlaubt}}$: Gruppe 1

- $E = 0 \wedge d < d_{erlaubt}$: Gruppe 2
- $E > 0 \wedge d \geq d_{erlaubt}$: Gruppe 3
- $E = 0 \wedge d \geq d_{erlaubt}$: Gruppe 4
- nicht erlaubter Gruppe 3 Pixel: Gruppe 5

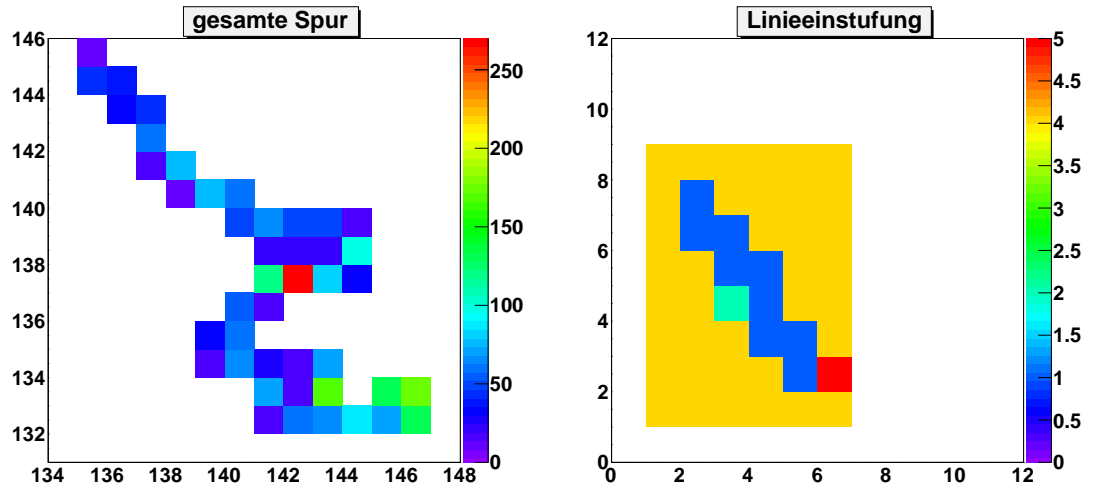
Ein Gruppe 3 Pixel gilt als nicht erlaubt, wenn er einen Gruppe 1 Pixel oder einen Gruppe 5 Pixel als Nachbarn hat. Abhängig von der Länge der Linie, ist nur eine bestimmte Anzahl Gruppe 2 Pixel und nur eine bestimmte Anzahl Gruppe 5 Pixel erlaubt. Wird eine der Zahlen überschritten, ist die Linie ungültig. Außerdem darf nur eine bestimmte Anzahl Pixel der Gruppe 1 oder 5 eine Energie über einem bestimmten Wert haben. Weiterhin wird überprüft ob die Quadranten, die nicht den Endpunkt beinhalten, mehr als eine bestimmte Zahl Pixel K_3 enthalten (ungültig) und ob der Quadrant gegenüber dem Quadrant des Endpunkts mehr als eine bestimmte Zahl Pixel K_4 enthält (ungültig). Zu jedem Startpunkt wird die längste Linie gespeichert.

Anschaulich dargestellt wird überprüft, ob eine möglichst ununterbrochene Linie zwischen Start- und Endpunkt existiert, die dünn genug ist, um noch als Linie zu zählen und keine Energien enthält, die beim Beginn einer Spur sehr unwahrscheinlich sind.

Ein Beispiel ist in Abbildung 3.10 dargestellt. Abbildung 3.10(a) zeigt das Bild der gesamten Spur. Abbildung 3.10(b) zeigt die Einteilung der Pixel in die fünf Gruppen, Abbildung 3.10(c) zeigt die Energie pro Pixel für einen Bildausschnitt. Aus Gründen der Übersichtlichkeit sind die Koordinatenachsen in Abbildung 3.10(b) und 3.10(c) gegenüber Abbildung 3.10(a) verschoben. Der Startpunkt liegt bei (2, 7) (dies entspricht (135, 145) in Abbildung 3.10(a)) der Endpunkt bei (5, 2), somit wurden alle Pixel, die im Rechteck mit den Ecken (1,1) und (6,8) liegen, untersucht. Der Startpunkt ist eine gültige Wahl, da seine Energie gering ist (etwa 12 keV), er nur zwei getriggerte Nachbarpixel hat und die Spur von diesem Pixel aus nur in eine Richtung verläuft. Die vier Quadranten um den Startpixel sind in diesem Fall wie folgt definiert (der Startpixel zählt zu keinem Quadranten):

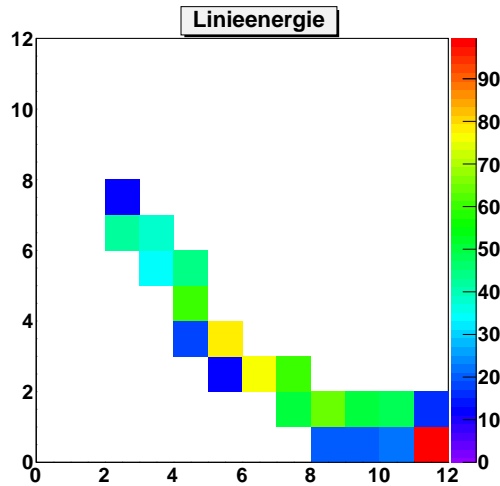
Q_1 :	$2 \leq x \leq 5; 7 \leq y \leq 10$	enthält 0 Pixel
Q_2 :	$-1 \leq x \leq 2; 7 \leq y \leq 10$	enthält 0 Pixel
Q_3 :	$-1 \leq x \leq 2; 4 \leq y \leq 7$	enthält 1 Pixel
Q_4 :	$2 \leq x \leq 5; 4 \leq y \leq 7$	enthält 6 Pixel

Dies ist erlaubt, da nur ein Quadrant mehr als einen Pixel beinhaltet, dieser dem Quadrant des Endpunkts (Q_4) nicht gegenüber liegt und für die Parameter $K_1 = 5, K_2 = 3, K_3 = 5, K_4 = 1$ gewählt wurde.



(a) Farblich dargestellt die Energieskala in keV

(b) Farblich dargestellt die Einteilung der Pixel in Gruppen. Es sind nur die eingeteilten Pixel dargestellt.



(c) Farblich dargestellt die Energieskala in keV

Abbildung 3.10 Simulierte Spur eines β -Zerfalls. Es ist für jeden getriggerten Pixel (Spalte, Zeile) die ihm gemessene Energie oder seine Einteilung in die fünf Gruppen farbcodiert dargestellt.

Nachdem alle möglichen Startpunkte auf Linien getestet wurden, werden alle Linien

überprüft indem der Abstand von Start- und Endpunkten einer Linie zu anderen Linien berechnet wird. Ist dieser Abstand zu einer gültigen Linie zu klein, wird die Linie als ungültig markiert, sonst als gültig. Dies ist notwendig, da sich bei den meisten Spuren die als Linie erkannt wurden, weitere Linien finden lassen, indem die Start- und Endpunkte leicht geändert werden. Mit dieser Gültigkeitsüberprüfung besteht eine geringe Gefahr, dass Linien fälschlicherweise aussortiert werden, falls diese in etwa auf einer Geraden liegen und dennoch genug Abstand haben um mehr als eine Linie zu sein, aber wie in Abbildung 3.11 zu erkennen ist, treten mehrere Linien bereits so selten auf, dass dies vernachlässigbar ist.

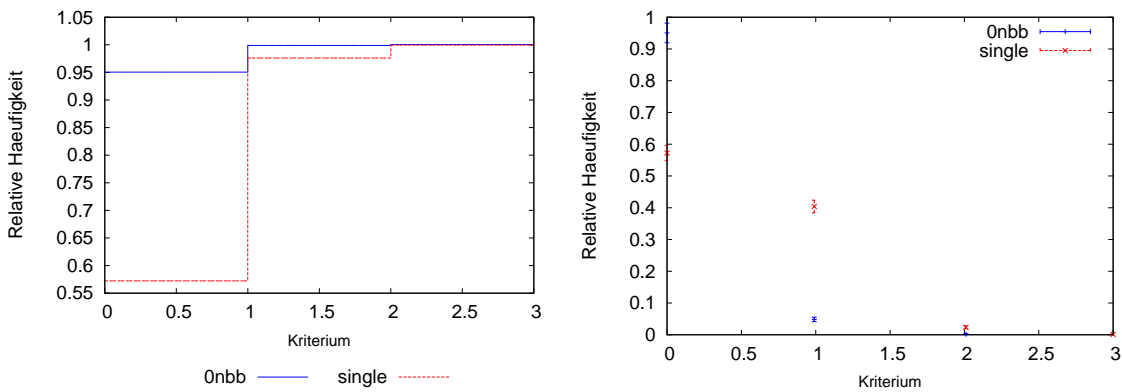


Abbildung 3.11 Histogramme über die Linienzahl. Links wurde über die relative Häufigkeit integriert. Einheit des Kriteriums ist Linien.

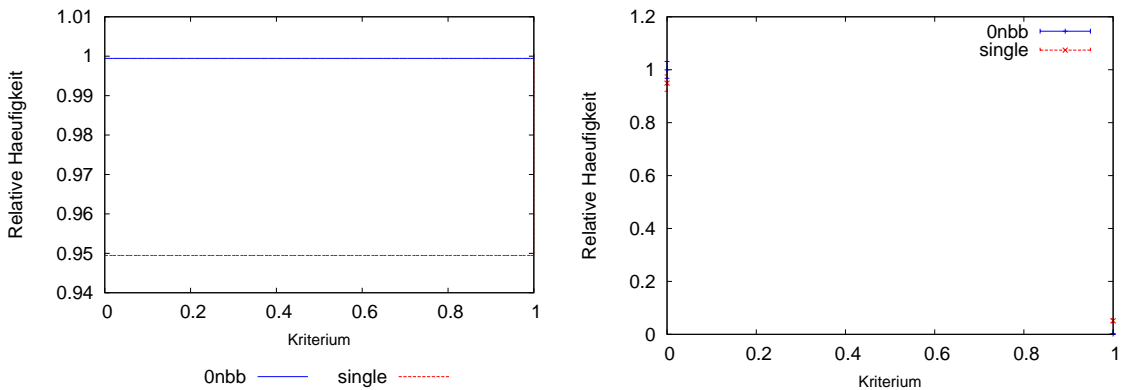


Abbildung 3.12 Histogramme über die Linienzahl für 220 µm Pixelgröße. Links wurde über die relative Häufigkeit integriert

Dünne Spur (Variante 1 und 2) Hierbei wird nach Pixeln gesucht, die Teil einer dünnen Spur sind. Das Kriterium ist die Zahl dieser Pixel. In jedem Fall darf so ein Pixel nur zwei Nachbarn haben, in Variante 1 bildet er mit diesen Pixeln eine Linie, also der mittlere von drei Pixeln in einer Reihe, in Variante 2 die Spitze eines rechtwinkligen Dreiecks. Ähnlich wie bei den vorherigen Kriterien ist die Wahrscheinlichkeit für diese Struktur höher, wenn ein Elektron hohe Energie hat, da ein solches Elektron eine höhere Wahrscheinlichkeit hat seine Richtung beizubehalten und in keinen weiteren Pixel in der Nähe Energie zu deponieren. Dies ist in Abbildung 3.13 und 3.14 zu erkennen. Es wurde zwischen diesen beiden Kriterien unterschieden, da Variante 2 zumindest eine Richtungsänderung voraussetzt, Variante 1 nicht.

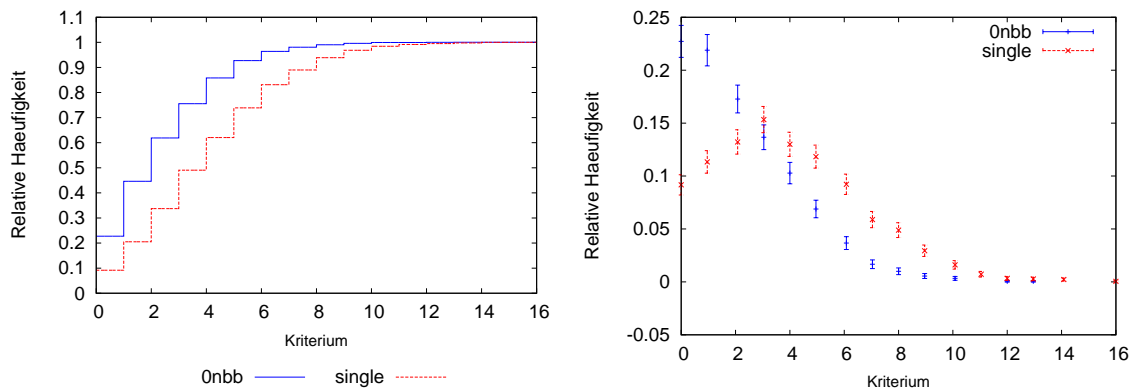


Abbildung 3.13 Histogramme über die dünne Spur (Variante 1). Links wurde über die relative Häufigkeit integriert. Einheit des Kriteriums ist Pixel.

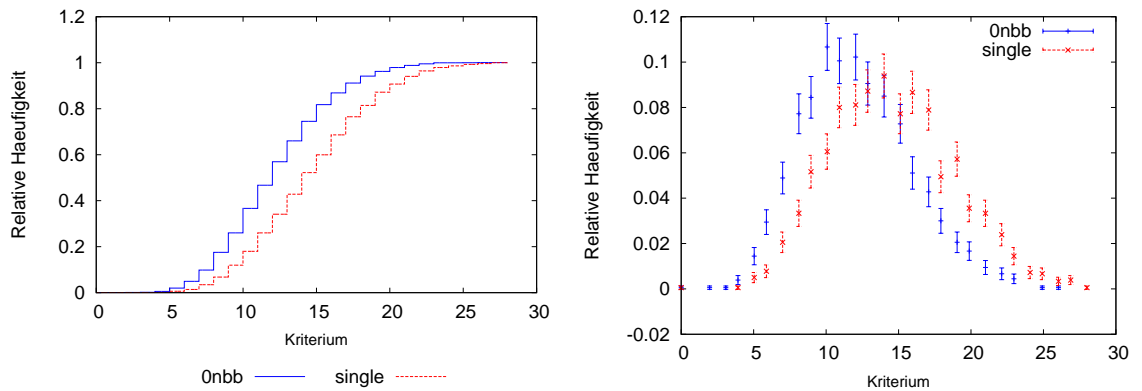


Abbildung 3.14 Histogramme über die dünne Spur (Variante 2). Links wurde über die relative Häufigkeit integriert. Einheit des Kriteriums ist Pixel.

3.3 Auswertung

Für das Training wird den Ereignissen eines einzelnen Elektrons der Wert -1 zugewiesen, zwei Elektronen der Wert +1. Bei der Auswertung der Daten berechnet das trainierte Programm aus einem Satz von Kriterien einen Wert k zwischen -1 und +1 und bewertet somit diese Daten. Dies ist in Abbildung 3.15 zu erkennen. Das Netz wurde nur an den Trainingsdaten (0nbb training und single training) trainiert. Der andere Datensatz (0nbb und single) ist unabhängig und geht nur als Abbruchbedingung ins Training ein. Dies sind die zur Auswertung relevanten Daten.

Die von dem Netz berechneten Graphen der Daten, an denen trainiert wurde, und die von den Daten, die zur Überprüfung verwendet wurden, sollten sich für eine Ereignisart (β oder $0\nu\beta\beta$) nicht zu stark voneinander unterscheiden. Dies wäre ein Zeichen von Übertraining. Ein Beispiel ist in Abbildung 3.16 zu erkennen. Während die Graphen der Trainingsdaten gut aussehen, sind die der Überprüfung wesentlich schlechter als in Abbildung 3.15. Das Netz hat dabei gelernt die speziellen Muster der Trainingsdaten zu erkennen, weniger die generellen Unterschiede zwischen den Spuren einzelner Elektronen und $\beta\beta$ -Ereignissen.

Auch bei Abbildung 3.15 handelt es sich um Integrale über die relative Häufigkeit, so dass die Abbildung genauso zu lesen ist wie die der Kriterien. Aus technischen Gründen wurde $x = 50k + 50$ auf der Abszisse aufgetragen. Die relative Häufigkeit soll im Folgenden mit $h_s(x)$ bzw. $h_d(x)$ (einzelne Elektronen bzw. $\beta\beta$ Ereignis) bezeichnet werden.

Mit diesen Daten kann nun der Untergrund reduziert werden indem ein Wert $g \in [0; 100]$ gewählt wird und alle Ereignisse mit $k < g$ als einzelne Elektronen aussortiert werden. In diesem Beispiel gilt $h_s(16) = 0.441$; $h_d(16) = 0.040$ und somit würde $g = 16$ bedeuten, dass 4,0% der $\beta\beta$ Ereignisse verlorengehen aber auch, dass der Untergrund einzelner Elektronen um 44.1% reduziert wird. Bei $g = 70$ wäre der Verlust der $\beta\beta$ Ereignisse 49,2% und der Untergrund durch einzelne Elektronen um 88,5% reduziert. Die optimale Wahl von g hängt vom erwarteten Energieantwortspektrum des $\beta\beta$ Zerfalls, dem Untergrund einzelner Elektronen und der Funktion $h_s(x)$ und $h_d(x)$ ab (dies ist in Kapitel 3.4 genauer dargestellt). Es ist daher schwierig die Qualität verschiedener Funktionen $h_{s1,2,3...}(x)$ und $h_{d1,2,3...}(x)$ zu bewerten. Es lässt sich aber sagen, dass aus $h_{sn}(x) \geq h_{sm}(x) \forall x \in]0; 100[\wedge h_{dn}(x) \leq h_{dm}(x) \forall x \in]0; 100[$ folgt, dass $h_{sn}(x), h_{dn}(x)$ zu bevorzugen ist. Bei gleichem Verlust von $\beta\beta$ Ereignissen wird in diesem Fall der Untergrund immer stärker oder gleich stark reduziert. In weniger eindeutigen Fällen hängt das Optimum aber vom Untergrund und den Energieantwortspektren ab.

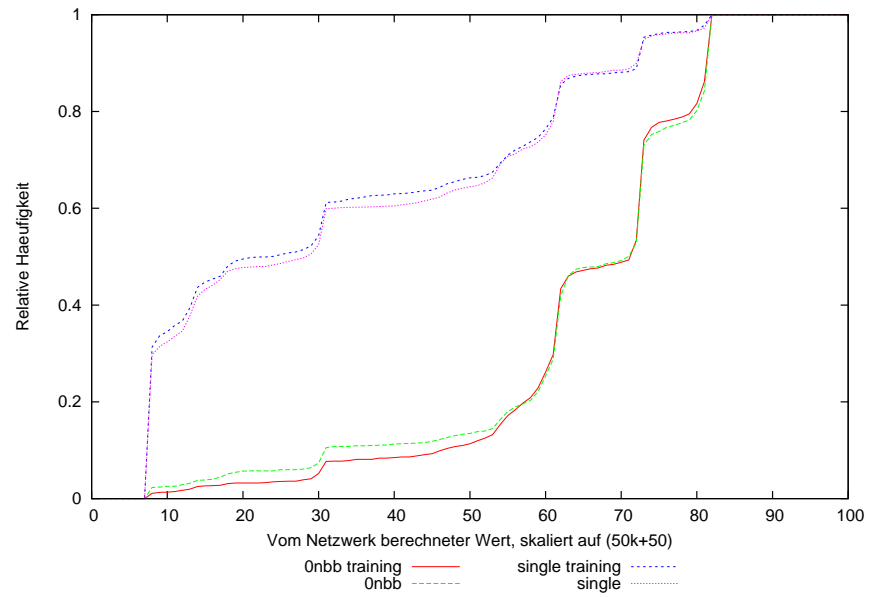


Abbildung 3.15 Integrale über die relative Häufigkeit der Einstufung durch das Neuronale Netz

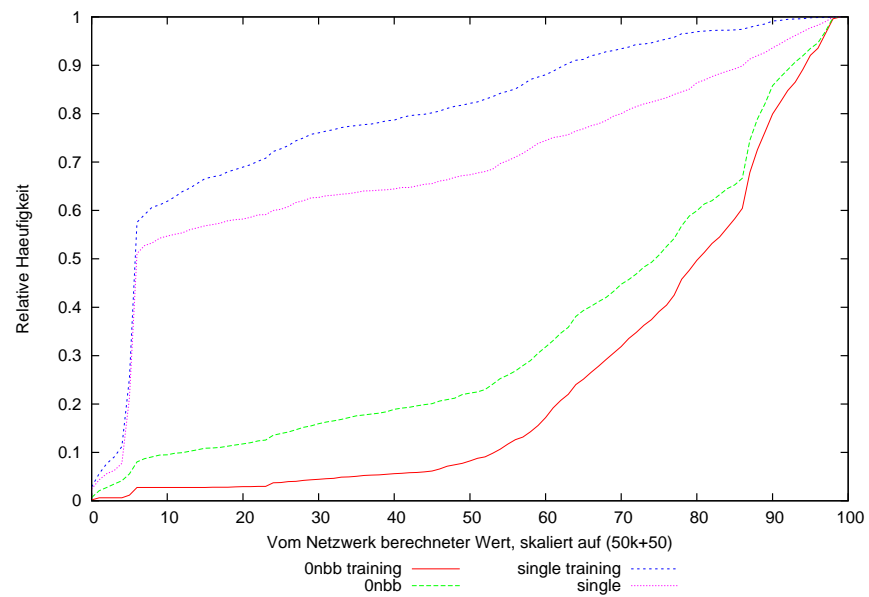


Abbildung 3.16 Integrale über die relative Häufigkeit der Einstufung durch das Neuronale Netz zur Demonstration von Übertraining

3.4 Ergebnisse

Um den Einfluss der Spuranalyse auf die Sensitivität zu testen, wurde die in Kapitel 2.1 beschriebene Methode wie folgt ergänzt:

- es wird ein $g \in [0; 100]$ gewählt
- es wird ein konstanter Untergrund bg_s einzelner Elektronen gewählt
- der Untergrund (zu diesem Zeitpunkt lediglich die $2\nu\beta\beta$ Ereignisse) und die Detektionseffizienz wird mit dem Faktor $(1 - h_d(g))$ multipliziert
- der Untergrund wird um $bg_s \cdot (1 - h_s(g))$ erhöht

Es wird dann die Sensitivität für alle ganzzahligen Werte von g berechnet und der beste verwendet. Diese Rechnung kann für verschiedene Werte von bg_s durchgeführt werden und somit die Sensitivität sowie der optimale Wert von g in Abhängigkeit des Untergrundniveaus bestimmt werden. Erwartungsgemäß bedeutet ein niedrigerer Untergrund auch einen niedrigeren Wert von g , da es dann wichtiger ist wenig $\beta\beta$ Ereignisse zu verlieren als einen großen Teil des Untergrunds zu eliminieren, während viel Untergrund einen hohen Wert von g , also einen restriktiven Schnitt, bevorzugt.

Wenn die Faktoren zur Modifikation von Detektionseffizienz und Untergrund auf Null gesetzt werden, entspricht diese Rechnung der Sensitivität bei Untergrund ohne Reduktion durch Spuranalyse. Damit kann die Sensitivität mit und ohne Optimierung durch Spuranalyse verglichen werden, sowie die Steigerung der Sensitivität in Abhängigkeit vom Untergrund. Dies ist in Abbildung 3.17 und 3.18 dargestellt. Erwartungsgemäß gleichen sich die Sensitivitäten an, wenn der Untergrund gegen Null geht. Der simulierte Detektor hat eine Dicke von 3 mm, 110 μm Pixelgröße und 1,5 kV Bias-Spannung.

Es ist wichtig zu beachten, dass es sich bei dem Untergrund, der auf der x-Achse angegeben ist, ausschließlich um den Untergrund einzelner Elektronen, die nicht von Alphateilchen begleitet werden oder andere Merkmale haben, handelt. Da davon ausgegangen werden kann, dass Alphateilchen und Myonen sehr gut erkannt werden können, kann der gesamte Untergrund wesentlich größer sein ohne einen merkbaren Einfluss auf die hier berechnete Sensitivität zu haben.

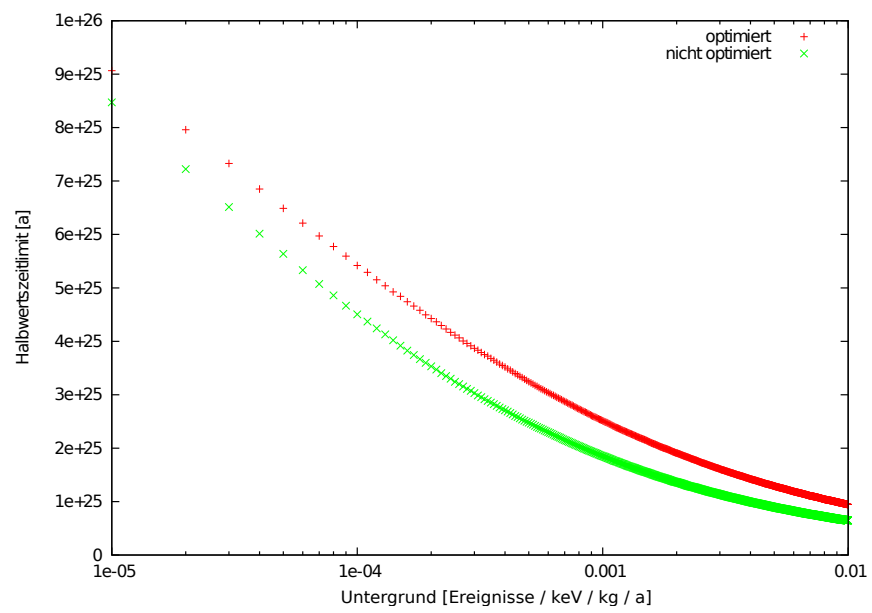


Abbildung 3.17 Sensitivität mit und ohne Optimierung durch Spuranalyse. 400 kg Cd-Te, Messzeit 3 Jahre, 3σ Konfidenz.

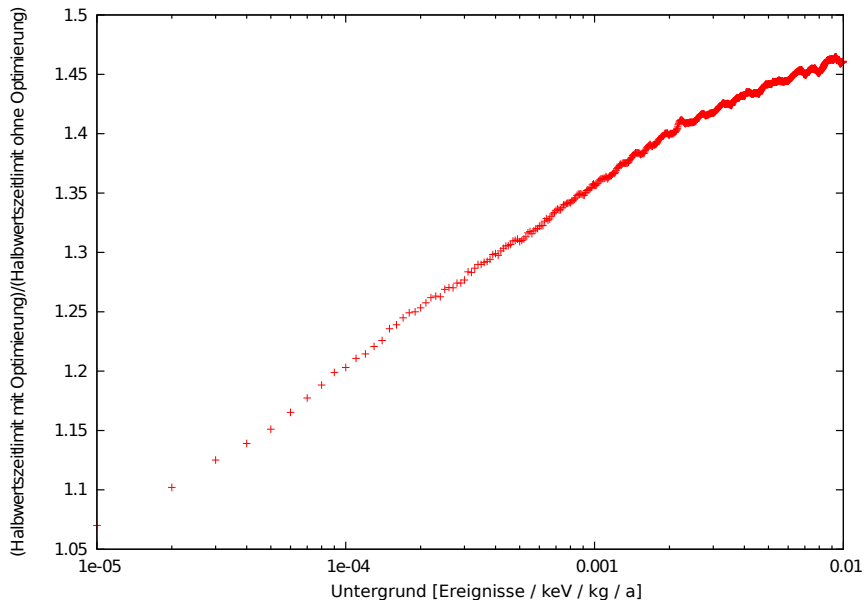


Abbildung 3.18 Verhältnis der Sensitivität mit und ohne Optimierung durch Spuranalyse. Die effektive Majorana-Masse des Neutrinos geht mit dem Exponent -2 in die Halbwertszeit des Zerfalls ein. Die Detektormasse geht genähert mit der Wurzel in die Halbwertszeit auf die der Detektor sensitiv ist ein. Eine Verbesserung des Halbwertszeitlimits um den Faktor 1.45 entspricht daher einem Detektor der um den Faktor 2.10 mehr Masse hat und einer um den Faktor 0.83 niedrigeren effektiven Majorana-Masse auf die der Detektor sensitiv ist.

3.5 Zusammenfassung

Es konnte gezeigt werden, dass die Spuranalyse zumindest mit Simulationsdaten funktioniert. Durch Unterscheidung von einzelnen Elektronen und $\beta\beta$ Ereignissen sind mithilfe dieser Optimierung deutliche Verbesserungen in der Sensitivität zu erreichen. Diese Untersuchung erhebt aber nicht den Anspruch die tatsächliche Leistungsfähigkeit des Timepix zu zeigen. Einige der Kriterien enthalten Parameter, die wahrscheinlich noch optimiert werden können wie z.B. die Energieschwelle für den Hochenergieabstand. Es können noch weitere Kriterien hinzugefügt werden, die Parameter des neuronalen Netzes können noch optimiert werden und auch andere Methoden zur Spuranalyse sind noch denkbar. Weiterhin beschränkte sich die Untersuchung im Wesentlichen auf eine Pixelgröße von 110 μm , aber wie in Kapitel 4.4 gezeigt, ist die Sensitivität bei anderen Pixelgrößen wie zum Beispiel 220 μm teilweise besser. Es ist zwar zu erwarten, dass die Spurerkennung bei großen Pixeln schlechter wird, da diese Bilder weniger Information enthalten, der Vergleich von Abbildung 3.19 und 3.20 zeigt aber, dass diese Methode auch bei größeren Pixeln gut funktionieren wird: Die Abbildungen zeigen das Ergebnis einer Auswertung für 110 μm und 220 μm . Zur Bewertung wurde das gleiche Programm verwendet, eine Optimierung der Kriterien auf 110 μm . Erwartungsgemäß ist die Auswertung für 220 μm etwas schlechter, aber die Ereignisse sind immer noch deutlich getrennt, und es ist zu erwarten, dass sich die Auswertung für 220 μm noch verbessern lässt, indem die Parameter auf diese Pixelgröße angepasst werden.

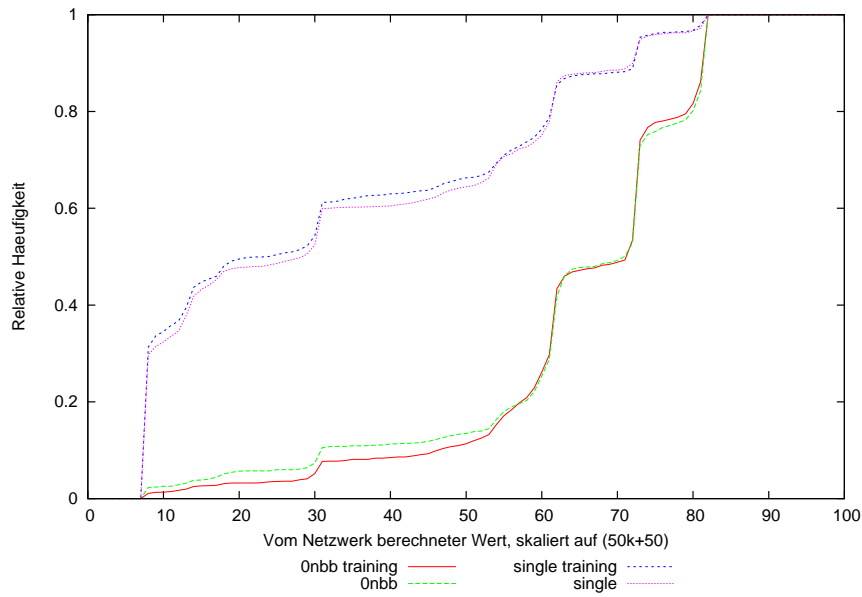


Abbildung 3.19 Auf Eins normierte und integrierte Histogramme über die relative Häufigkeit der Einstufung durch das Neuronale Netz für eine Pixelgröße von 110 μm

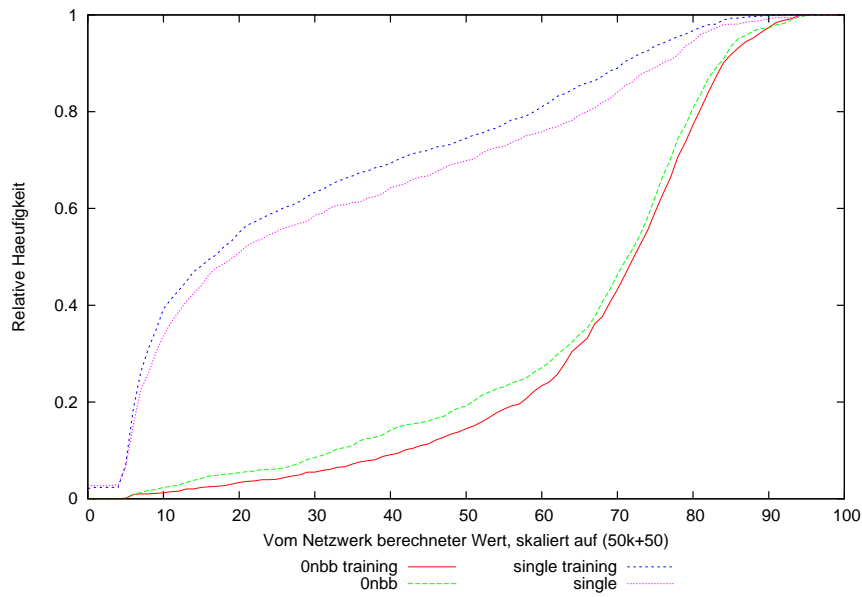


Abbildung 3.20 Auf Eins normierte und integrierte Histogramme über die relative Häufigkeit der Einstufung durch das Neuronale Netz für eine Pixelgröße von 220 μm

4 Optimierung des Detektors

Für den Detektor sind eine große Zahl Parameter von Bedeutung, beispielsweise der TOTnoise, die Dicke des Sensors und die angelegte Spannung. Nicht alle davon sind jedoch für eine Optimierung interessant. Zum Beispiel ist zu erwarten, dass ein niedriger TOTnoise immer von Vorteil ist.

Direkt beeinflussbar ist die angelegte Spannung, die Pixelgröße, und die Dicke des Sensors. Der Einfluss dieser Parameter soll in diesem Kapitel untersucht werden. Alle Ergebnisse basieren auf Simulationsdaten, die mit ROSI erstellt wurden. Optimiert wurde letztlich nach der Sensitivität (siehe Kapitel 2.1).

Der Pixelpitch wurde für 110 μm , 165 μm , 220 μm , 330 μm , 440 μm und 550 μm simuliert, die Sensordicke für 2 mm, 3 mm, 4 mm und 5 mm. Die Simulationen wurden auf diesen Wertebereich der Parameter beschränkt, da anhand dieser Simulationen bereits zu erkennen ist, dass kein Optimum außerhalb dieses Wertebereichs zu erwarten ist. Es wurden keine feineren Intervalle gewählt bzw. nicht mehr Ereignisse pro Kombination der Parameter simuliert, da dies Rechenzeit kostet und sich in diesem Stadium der Planung noch nicht lohnt, da andere Unsicherheiten dominieren. Zum Beispiel wurden für den TOTnoise, wie in Kapitel 1.15 beschrieben, Messwerte eines Siliziumsensors, die nur in bestimmten Bereichen gemessen wurden, angenommen und, wie in Kapitel 1.4 beschrieben, ist die Formel für das elektrische Feld eine empirische Näherung.

Die Auswertungen der Simulationen wurden mit Standardparametern (Kapitel 2.1) durchgeführt.

4.1 Face To Face

Wie in Kapitel 1.8 beschrieben besteht die Möglichkeit, dass Elektronen den Sensor verlassen bevor sie ihre komplette Energie deponiert haben, was zu einem zusätzlichen Energieunsicherheit führt. Dies lässt sich verbessern, indem die Detektoren so angeordnet werden, dass sich jeweils zwei Sensorflächen gegenüber stehen. Damit kann ein Elektron, welches einen der Sensoren verlässt, immer noch den zweiten erreichen und dort seine Energie deponieren.

Dies wurde in die Simulation implementiert, indem der zweite Detektor in einem Abstand von 500 μm platziert wurde und ein Ereignis nun mit gleicher Wahrscheinlichkeit in einem der beiden Detektoren erzeugt wird. Das Energieantwortspektrum berechnet sich dann als Summe der Energieantworten beider Detektoren. Da sich die Detektoren

in der Simulation nicht gegenseitig beeinflussen, beschränkt sich die Auswirkung dieser Änderung darauf, dass der mögliche Energieverlust von Elektronen geringer wird. Somit ist zu erwarten, dass dieser Aufbau in jedem Fall die Ergebnisse verbessert.

Beispielsweise ändern sich bei einem Detektor mit Sensordicke 3 mm, 110 μm Pixelgröße und 1,5 kV Bias-Spannung die Ergebnisse wie folgt:

Energieauflösung:

$$1.585^{+0.037}_{-0.046}\% \text{ auf } 1.812^{+0.055}_{-0.070}\%$$

Detektionseffizienz:

$$50.11^{+1.22}_{-0.81}\% \text{ auf } 57.65^{+1.45}_{-1.45}\%$$

Sensitivität:

$$1.13^{+0.02}_{-0.02} \cdot 10^{26} a \text{ auf } 1.30^{+0.03}_{-0.03} \cdot 10^{26} a$$

Die Energieschnitte sind in beiden Fällen fast identisch (untere Grenze $2694.36^{+0.89}_{-0.95}$ keV bzw. $2695.09^{+0.61}_{-1.06}$ keV. Dies entspricht der gleichen Zahl $2\nu\beta\beta$ Ereignisse als Untergrund. Die Verschlechterung der Energieauflösung kommt vermutlich daher, dass die Elektronen, die beide Sensoren treffen, im Durchschnitt mehr Pixel treffen und daher eine geringere Energie pro Pixel deponieren. Dies erhöht den TOTnoise (siehe Kapitel 1.6). Dies sollte aber keine Verschlechterung der Sensitivität bewirken, denn schlimmstenfalls fallen diese Ereignisse durch die Energieschnitte heraus, was bei nur einem Sensor sowie so passieren würde. Es wurde daher für alle weiteren Simulationen ein solcher Aufbau gewählt.

4.2 Spannung

Wie in Kapitel 1.4 beschrieben bedeutet eine höhere Spannung kürzere Driftzeiten. Dies kann zu verbesserter Energieauflösung durch vermindertes Charge Sharing führen und senkt die Wahrscheinlichkeit, dass Ladungsträger vorzeitig rekombinieren. Es ist daher zu erwarten, dass die Spannung so groß wie möglich sein sollte, wobei diese durch die nicht in der Simulation berücksichtigte Durchschlagsspannung und auftretende Leckströme begrenzt ist. Eine denkbare Ausnahme wäre, wenn der positive Einfluss des Charge Sharing (siehe Kapitel 1.5) den negativen überwiegt, so dass eine erhöhte Spannung die Energieauflösung verschlechtert, dies konnte aber nicht festgestellt werden.

Ein Beispiel ist in Abbildung 4.1 und 4.2 zu erkennen. Die Sensitivität und Energieauflösung verbessert sich mit steigender Spannung. Allerdings wird der positive Einfluss immer geringer, da andere Störfaktoren wie beispielsweise der TOTnoise unverändert bestehen bleiben und somit deren Einfluss irgendwann überwiegt. Der letzte Datenpunkt liegt deutlich über dem realistisch Möglichen und zeigt immer noch eine Verbesserung. Daher kann die Spannung dadurch optimiert werden, dass die maximal mögliche verwendet wird.

Ein Timepix konnte in Erlangen bei einer Sensordicke von 1 mm erfolgreich mit 500 V Bias-Spannung betrieben werden. Deswegen wurde eine Bias-Spannung von

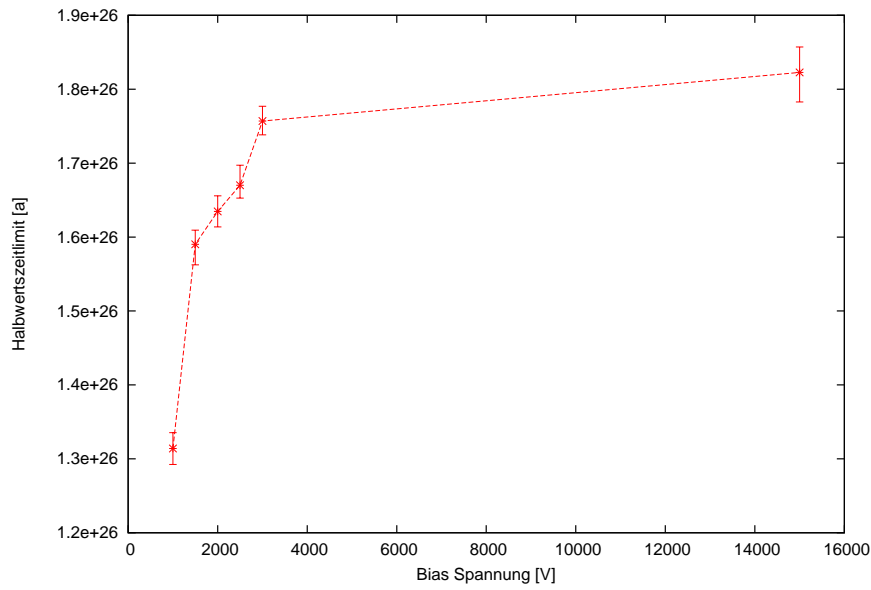


Abbildung 4.1 Sensitivität eines Detektors bei verschiedenen Bias-Spannungen. Sensordicke 3mm, Pixelgröße 220 μm

500 V/mm-Sensordicke als Grundlage für die Optimierung der anderen Parameter verwendet. Sollte sich aus weiteren experimentellen Daten ein anderes Maximum für die mögliche Bias-Spannung ergeben, so müssen daher auch die Optimierungen neu berechnet werden.

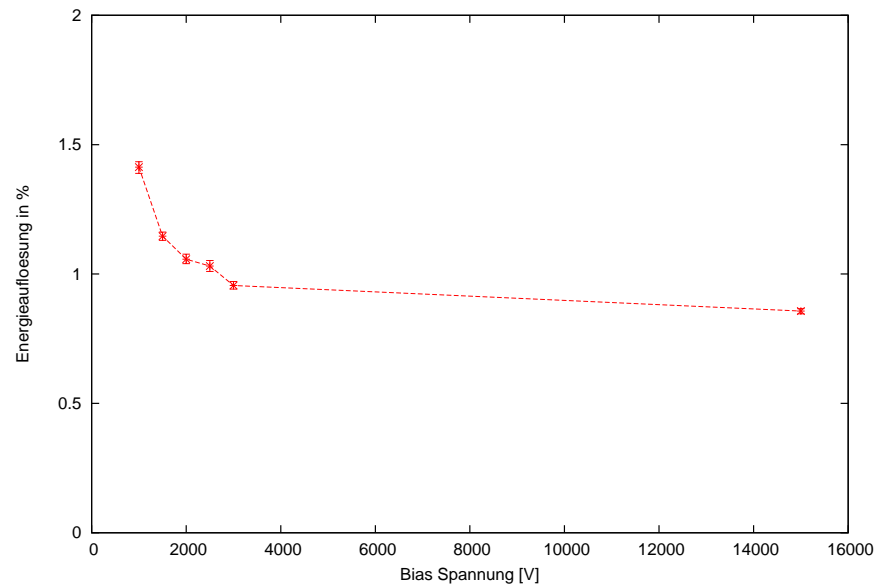


Abbildung 4.2 Energieauflösung eines Detektors bei verschiedenen Bias-Spannungen. Sensordicke 3mm, Pixelgröße 220 μm

4.3 Sensordicke

Ein dickerer Sensor hat zur Folge, dass weniger Elektronen den Sensor verlassen, was ähnlich wie ein Face to Face Aufbau, die Sensitivität verbessern würde. Bei gleicher Energieauflösung sollten dickere Sensoren eine höhere Sensitivität haben, da sich aufgrund des geringeren Elektronenverlustes auch mehr Ereignisse im Peak befinden. Dies ist auch in folgendem Beispiel zu erkennen:

Es wurden 10^5 $0\nu\beta\beta$ Ereignisse simuliert und die Zahl der Ereignisse in einem der Sensoren, in denen die Elektronen eine Energiedeposition über 2600 keV haben, gezählt. Der Peak liegt in jedem Fall über diesem Bereich, aber nur wenige Ereignisse, die nicht zum Peak gehören, vergleiche dazu das Energieantwortspektrum in Abbildung 1.5. Erwartungsgemäß ist die Anzahl bei dickeren Sensoren größer.

für 110 μm Pixelgröße:

3 mm Sensordicke: 2925 Ereignisse

5 mm Sensordicke: 3273 Ereignisse

für 440 μm Pixelgröße:

3 mm Sensordicke: 2814 Ereignisse

5 mm Sensordicke: 3390 Ereignisse

Die Energiegrenze von 2600 keV bezieht sich hierbei auf die Energie, die die Elektronen im Sensor deponieren, nicht auf die gemessene Energie. Dies schließt Effekte wie Charge

Sharing, Rekombination aus.

Aufgrund der Annahme einer maximalen Bias-Spannung von 500 V/mm·Sensordicke bzw. allgemein einer maximalen Spannung von x V/mm·Sensordicke; $x \in \mathbb{R}$ bedeutet ein dickerer Sensor eine niedrigere äquivalente Spannung (siehe Kapitel 1.4). Somit sind die Driftzeiten größer. Dies verstärkt Repulsion und Diffusion, sowie den Energieverlust durch Rekombination von Ladungsträgern. Es steigt also das Charge Sharing und der Ladungsträgerverlust durch Rekombination.

Auch dies kann an dem gleichen Beispiel gezeigt werden indem der durchschnittliche Unterschied pro Ereignis zwischen Energiedeposition und gemessener Energie betrachtet wird. Erwartungsgemäß ist dieser bei dicken Sensoren größer und stammt von der Rekombination der Ladungsträger. Das Charge Sharing dürfte dabei vernachlässigbar sein, da ohne Energieschwelle gerechnet wurde und daher das Charge Sharing nur Rauschen erzeugt, keinen Energieverlust.

für 110 μm Pixelgröße:

3 mm Sensordicke: 53.35 keV Energieverlust

5 mm Sensordicke: 95.10 keV Energieverlust

für 440 μm Pixelgröße:

3 mm Sensordicke: 74.29 keV Energieverlust

5 mm Sensordicke: 100.91 keV Energieverlust

Hierbei wurden nur die Ereignisse verwendet, bei denen eine vom Detektor gemessene Energiedeposition von über 2600 keV vorliegt. Ein Beispiel für diesen Energieverlust ist die Differenz zwischen der gesamten Energie in Abbildung 1.13(a) und der gesamten Energie in Abbildung 1.13(b).

Aufgrund des Charge Sharing kann auch in Pixelelektroden, in denen die Elektronen keine Energie deponiert haben, Ladung influenziert werden. Betrachtet man den durchschnittliche Energieverlust pro Ereignis, der dadurch stattfindet, dass Ladung, die einer Energie unter der Energieschwelle von 7 keV entspricht, influenziert wird, so ist der Einfluss des Charge Sharing zu erkennen. Bei gleicher Pixelgröße steigt der Energieverlust mit der Sensordicke.

für 110 μm Pixelgröße:

3 mm Sensordicke: 40.03 keV Energieverlust

5 mm Sensordicke: 48.23 keV Energieverlust

für 440 μm Pixelgröße:

3 mm Sensordicke: 3.62 keV Energieverlust

5 mm Sensordicke: 3.94 keV Energieverlust

Ein Beispiel für diesen Energieverlust ist die Energiesumme aller Pixel die in Abbildung 1.13(c) eine Energie unter 7 keV haben, in Abbildung 1.13(a) aber eine Energie von 0 keV.

Ein weiterer Einfluss ist das in Kapitel 1.7 beschriebene Wichtungspotential, welches dicke Sensoren begünstigt. Dies verringert den Energieverlust bei dicken Sensoren, dieser Vorteil macht sich in den Beispielen aber nicht gegenüber dem Verlust durch Rekombination bemerkbar.

Aufgrund dieser Effekte ist also zu erwarten, dass eine von den restlichen Parametern abhängige Sensordicke für maximale Sensitivität existiert, da ab einer bestimmten Dicke die negativen Einflüsse überwiegen.

Dies ist am Vergleich von Abbildung 4.3 und 4.4 zu erkennen. Bei kleinen Pixeln ist die Energieauflösung der dickeren Sensoren schlechter. Die Energieauflösung der dickeren Sensoren wird aber mit größeren Pixeln besser, da größere Pixel das Charge Sharing reduzieren (siehe Kapitel 4.4 bzw. 1.5), und somit den negativen Einfluss dickerer Sensoren verringern. Außerdem ist zu erkennen, dass sich die Sensitivität zwar ähnlich verhält wie die Energieauflösung, bei ähnlicher Energieauflösung dickere Sensoren aber eine bessere Sensitivität haben. Nach Abbildung 4.3 liegt die optimale Sensordicke bei etwa 3 mm. Das Optimum sollte sich bei größerer Spannung zu dickeren Sensoren verschieben, da dadurch der Nachteil längerer Driftzeiten vermindert wird. Dies ist durch den Vergleich von Abbildung 4.3 und 4.4 mit Abbildung 4.5 und 4.6 zu erkennen. Die Spannung wurde von 500 V/mm·Sensordicke auf 1000 V/mm·Sensordicke erhöht, die Energieauflösungen der verschiedenen Sensordicken nähern sich an, da der Einfluss von Charge Sharing und Rekombination sinkt, wodurch die Sensordicke für die beste Sensitivität steigt und bei etwa 4 mm zu finden ist.

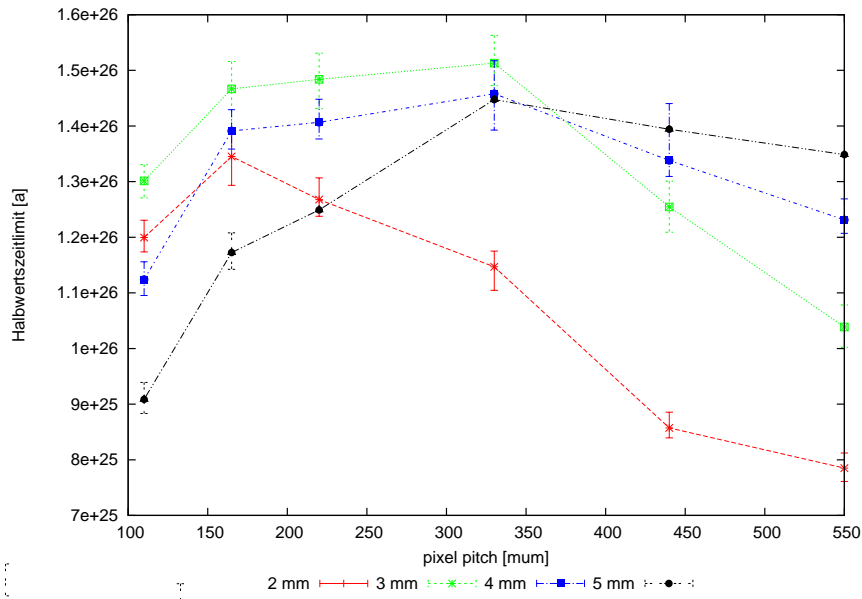


Abbildung 4.3 Sensitivität als Halbwertszeitlimit für verschiedene Sensordicken (2mm, 3mm, 4mm, 5mm) und Pixelgrößen bei 500V/mm-Sensordicke Bias-Spannung

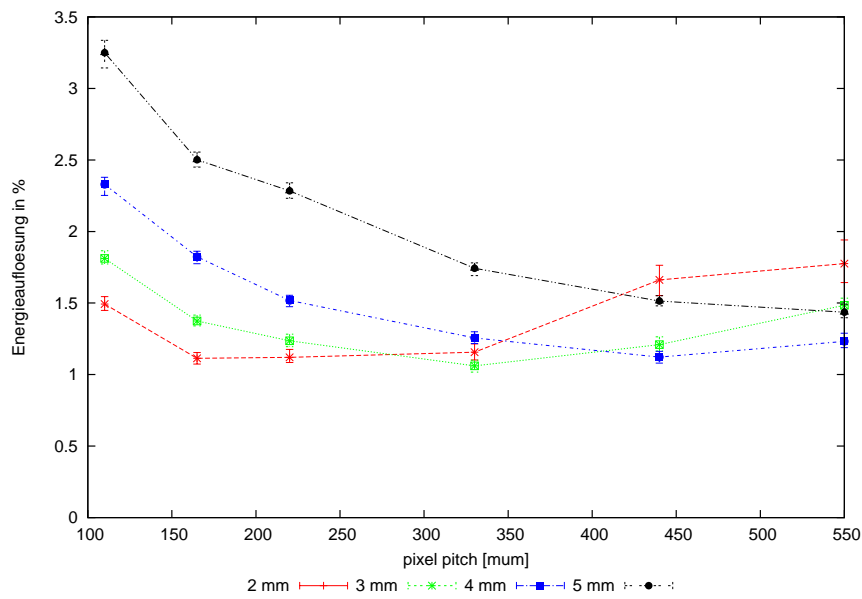


Abbildung 4.4 Energieauflösung für verschiedene Sensordicken (2mm, 3mm, 4mm, 5mm) und Pixelgrößen bei 500V/mm-Sensordicke Bias-Spannung

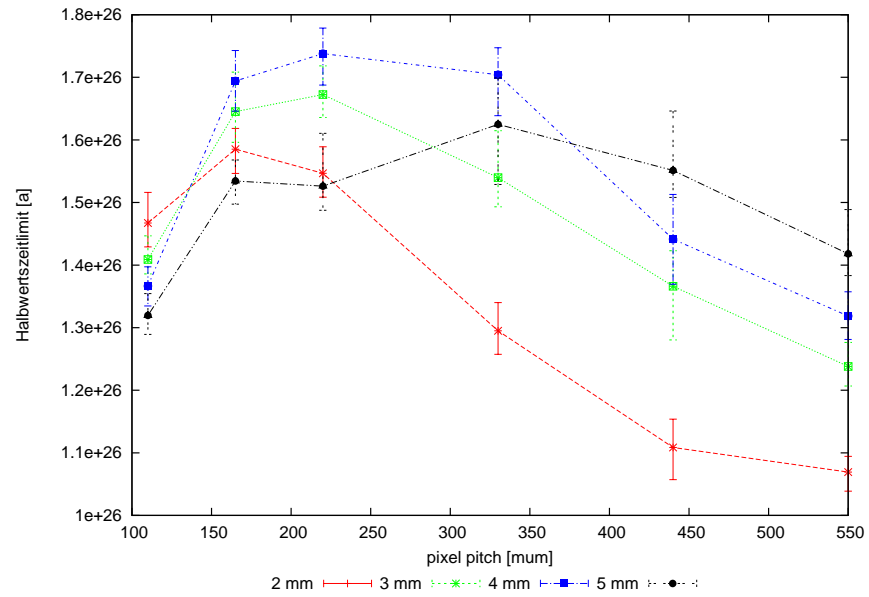


Abbildung 4.5 Sensitivität als Halbwertszeitlimit für verschiedene Sensordicken (2mm, 3mm, 4mm, 5mm) und Pixelgrößen bei 1000V/mm·Sensordicke Bias-Spannung

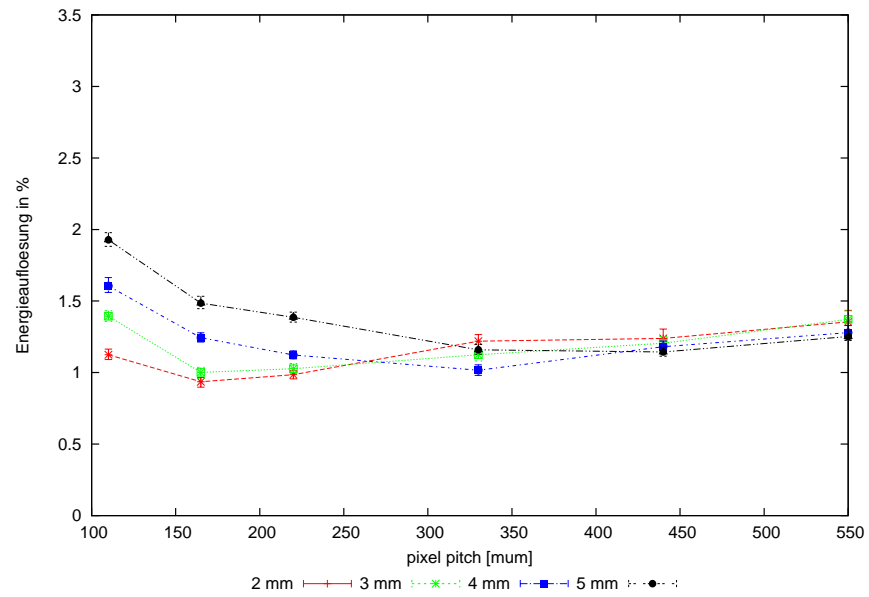


Abbildung 4.6 Energieauflösung für verschiedene Sensordicken (2mm, 3mm, 4mm, 5mm) und Pixelgrößen bei 1000V/mm·Sensordicke Bias-Spannung

4.4 Pixelpitch

Ein größerer Pixelpitch bedeutet, dass weniger Pixel getroffen werden und somit die durchschnittliche Energie pro Pixel steigt. Da der TOTnoise bei steigender Energie pro Pixel sinkt (siehe Kapitel 1.6), ist dadurch eine Verbesserung der Energieauflösung zu erwarten. Da der TOTnoise aber nicht beliebig sinkt, wird dieser Effekt bei steigender Pixelgröße immer schwächer.

Weiterhin reduziert dies den Verlust an gemessener Energie durch Charge Sharing (siehe Kapitel 1.5), da es auch weniger benachbarte Pixel gibt. Auch dieser Effekt sollte mit steigender Pixelgröße schwächer werden, da mit geringer werdendem Charge Sharing, dessen Einfluss auf die Energieauflösung sinkt. Dies kann wieder an dem in Kapitel 4.3 gezeigten Beispiel des durchschnittlichen Energieverlustes pro Ereignis durch Charge Sharing gesehen werden.

für 3 mm Sensordicke:

110 μm Pixelgröße: 40.03 keV Energieverlust

440 μm Pixelgröße: 3.62 keV Energieverlust

für 5 mm Sensordicke:

110 μm Pixelgröße: 48.23 keV Energieverlust

440 μm Pixelgröße: 3.94 keV Energieverlust

Weniger Pixel bedeuten aber auch, dass zur Berechnung der gesamten Energie über weniger Pixel summiert wird, was die Energieauflösung verschlechtert.

Durch diese drei Effekte ist also zu erwarten, dass es ein Optimum der Pixelgröße gibt. Über diesem Optimum sollte die Sensitivität schlechter werden, da der negative Einfluss der sinkenden Pixelzahl, den positiven Einfluss des sinkenden TOTnoise pro Pixel und abnehmendes Charge Sharing überwiegt.

Dieses Optimum sollte sich bei kleineren Spannungen bzw. dickeren Sensoren zu größeren Pixeln verschieben, da der Einfluss des Charge Sharing steigt. Dies ist in Abbildung 4.4 zu erkennen.

Durch die Pixelgröße ändert sich außerdem das Wichtungspotential (siehe Kapitel 1.7). Größere Pixel bedeuten einen höheren Anteil des Löcherstroms an der Gesamtenergie, was aufgrund der langen Driftzeiten von Löchern (etwa eine Größenordnung über der von Elektronen) zu einem Energieverlust und somit zu weniger Ereignissen im Peak führen sollte. Dies ist durch den Vergleich von Abbildung 4.3 und 4.4 zu erkennen. Bei größeren Pixeln ist erkennbar, dass die nächstgrößeren Pixel zwar eine geringfügige Verbesserung der Energieauflösung bewirken können, die Sensitivität aber sinkt. Wie in den Bildern zu erkennen, ist dieser Effekt nur gering und andere Ursachen können nicht ausgeschlossen werden. Ein weiterer Hinweis ist aber Abbildung 4.7. Dabei wurde bei ansonsten identischen Simulationsparametern für einen Sensor der Dicke 5 mm die Integrationszeit verdoppelt, was einen geringeren Verlust des Löcherstroms bedeutet und der Verschlechterung der Sensitivität entgegenwirken sollte. Wie zu erkennen ist, verhält sich die Abhängigkeit der Sensitivität von der Pixelgröße bis etwa 330 μm in beiden Fällen

ähnlich. Ab dieser Größe sinkt bei der ursprünglichen Integrationszeit die Sensitivität obwohl sich die Energieauflösung verbessert. Bei doppelt so langer Integrationszeit steigt die Sensitivität aber.

Ein weiterer Effekt größerer Pixel ist, dass weniger Informationen über die Spur vorhanden sind, und somit die Unterscheidung der $\beta\beta$ -Ereignisse von anderen Ereignissen erschwert wird. Nach diesen Daten liegt das Optimum daher bei etwa $165\text{ }\mu\text{m}$ - $220\text{ }\mu\text{m}$, die Sensitivität ist bei $300\text{ }\mu\text{m}$ zwar geringfügig höher, aber es ist anzunehmen, dass der Informationsverlust über die Spur durch die größeren Pixel dies mehr als zunichte macht.

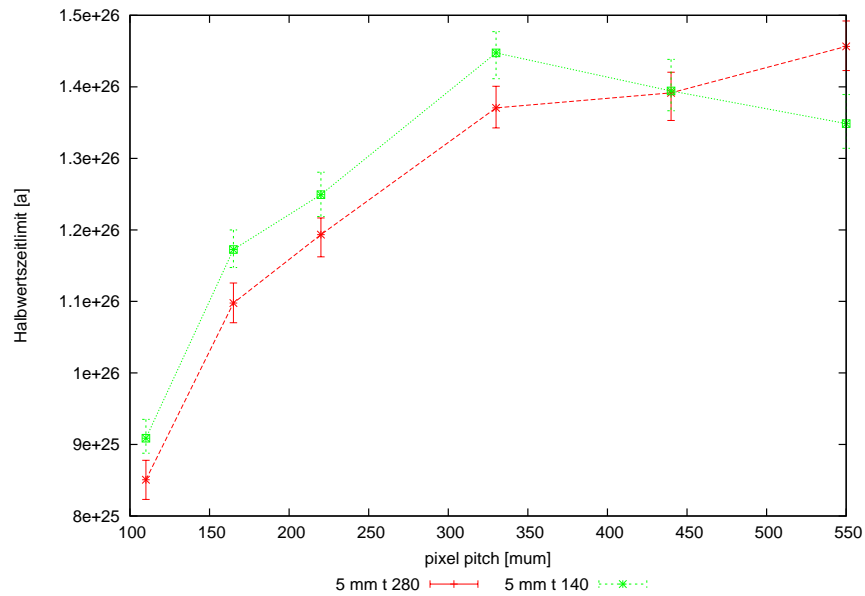


Abbildung 4.7 Sensitivität als Halbwertszeitlimit für einen Sensor der Dicke 5mm bei Integrationszeit von 140ns und 280ns. 140ns entspricht etwa der maximalen Driftzeit der Elektronen für diesen Sensor

4.5 Einfluss des TOTnoise auf die Optimierung

Wie in Kapitel 1.6 beschrieben, ist der TOTnoise nicht exakt bekannt. Insbesondere für hohe Energien ist eine Abschätzung nötig. Bei den gerade vorgestellten Optimierungen in Abbildung 4.3 bis 4.7 wurde ein Hochenergie-Grenzwert des TOTnoise von 0.8% angenommen. Er wurde gewählt um die Ergebnisse "sicher" zu machen, so dass die errechnete Sensitivität auch dann erreicht werden kann, wenn sich der TOTnoise außerhalb der bekannten Messwerte nicht so gut verhält wie erwartet wird (siehe Kapitel 1.6).

Möglich ist aber auch ein Grenzwert von 0%. Zur Umsetzung in der Simulation wurde

angenommen, dass der absolute TOTnoise ab einem bestimmten Wert konstant bleibt. Und zwar ab dem Messwert der zum höchsten Wert TOT-Schläge der Messung gehört (192.9 TOT-Schläge, absoluter TOTnoise 4.183 TOT-Schläge, Abbildung 1.15). Dies ist eine vorsichtige Abschätzung, die Konstanz wird von [17] erwartet. Nach dem Graphen in Abbildung 1.15 ist zu erwarten, dass der absolute TOTnoise zunächst noch weiter sinkt, allerdings gibt diese Messung keinen Hinweis wie weit.

Die Ergebnisse für Energieauflösung und Sensitivität, für deren Berechnung von den gleichen Sensorparametern wie in Abbildung 4.3 und 4.4 ausgegangen wurde, sind für diesen asymptotisch gegen Null gehenden TOTnoise in Abbildung 4.9 und 4.10 dargestellt. Die Energieauflösung und somit die Sensitivität ist wie zu erwarten besser, da der TOTnoise bei hohen Energien niedriger ist. Die Optima der Energieauflösung verschieben sich zu größeren Pixeln, da es keine Energiegrenze mehr gibt ab welcher der TOTnoise nicht mehr sinkt. Außerdem ist der TOTnoise dadurch insgesamt niedriger, so dass eine Mittelung über mehrere Pixel (der Vorteil kleiner Pixel) einen geringeren Einfluss auf die Energieauflösung hat. Dass die Sensitivität bei kleinen Pixeln besser ist, lässt sich auch hier wie in Kapitel 4.4 mit dem Einfluss des Wichtungspotentials erklären, dessen Einfluss mit sinkendem TOTnoise steigt. In Abbildung 4.8 ist wie in Abbildung 4.7 zu erkennen, dass eine größere Integrationszeit diesen Einfluss verringert und damit das Optimum zu größeren Pixeln verschiebt. Das Optimum dickerer Sensoren ergibt sich vermutlich dadurch, dass der Nachteil des schlechteren Charge Sharing und der stärkeren Rekombination durch größere Pixel ausgeglichen werden kann. Diese werden hierbei vom TOTnoise bevorzugt, während der negative Einfluss des Wichtungspotentials durch größere Pixel bei dickeren Sensoren geringer ist.

Das Optimum verschiebt sich zwar zu dickeren Sensoren, aber nur bei größeren Pixeln (etwa ab 330 μm). Bei dieser Pixelgröße geht aber viel Information über die Spur verloren, es kann daher davon ausgegangen werden, dass auch bei diesem TOTnoise das Optimum bei etwa 3mm Sensordicke und 165 μm Pixelgröße liegt.

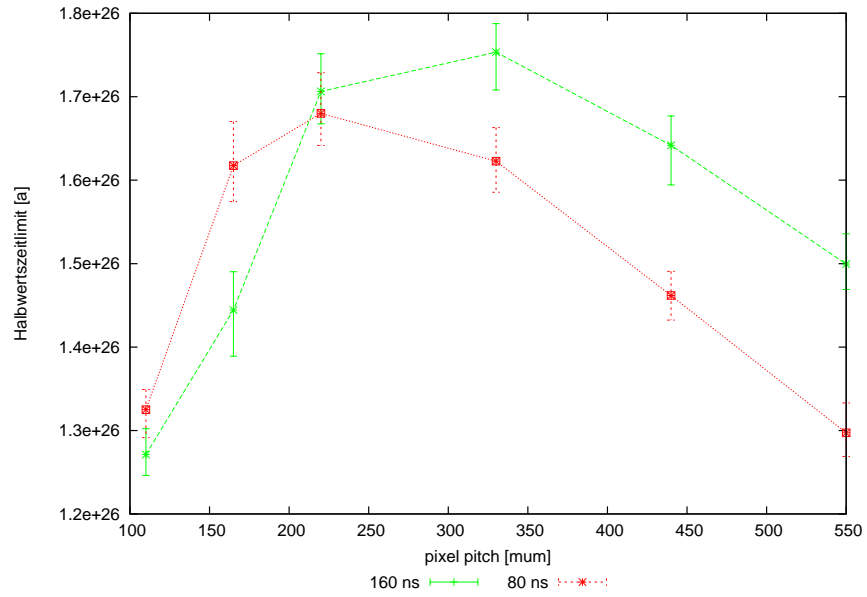


Abbildung 4.8 Sensitivität als Halbwertszeitlimit für einen Sensor der Dicke 3mm bei Integrationszeit von 80ns und 160ns, Grenzwert des TOTnoise ist 0

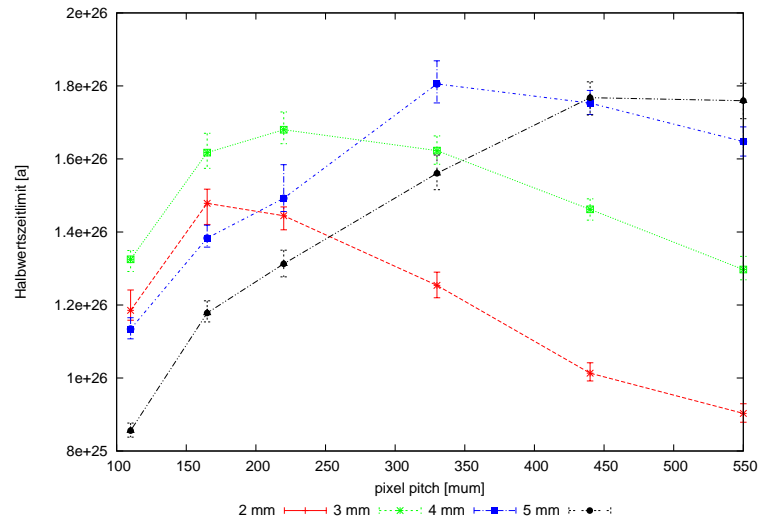


Abbildung 4.9 Sensitivität als Halbwertszeitlimit für verschiedene Sensordicken (2mm, 3mm, 4mm, 5mm) und Pixelgrößen bei 500V/mm·Sensordicke, Grenzwert des TOTnoise ist 0

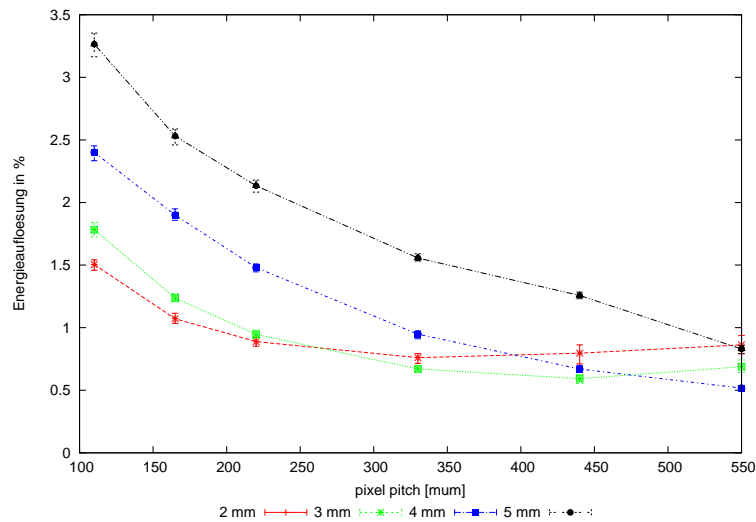


Abbildung 4.10 Energieauflösung für verschiedene Sensordicken (2mm, 3mm, 4mm, 5mm) und Pixelgrößen bei 500V/mm·Sensordicke, Grenzwert des TOTnoise ist 0

4.6 Zusammenfassung

Der sichtbare Einfluss der untersuchten Parameter lässt sich wie folgt zusammenfassen.

- Vorteile hoher Spannung
 - geringeres Charge Sharing
 - weniger Rekombination
- Nachteile hoher Spannung
 - Leckströme und Durchbruchsspannung
- Vorteile dicker Sensoren
 - weniger Elektronen verlassen den Sensor
 - geringerer Löcherstromanteil
- Nachteile dicker Sensoren
 - steigendes Charge Sharing
 - mehr Rekombination
- Vorteile großer Pixel
 - geringeres Charge Sharing

- weniger TOTnoise (höhere Energie pro Pixel)
- Nachteile großer Pixel
 - schlechtere Spurerkennung
 - größeres Rauschen (es wird über weniger Pixel summiert)
 - größerer Löcherstromanteil

Bedenkt man die Spurerkennung, die nicht in diese Optimierung eingeht, so ist zu erwarten, dass ein Timepix Detektor zum Nachweis des $0\nu\beta\beta$ Zerfalls eine Sensordicke von etwa 3 mm und eine Pixelgröße von etwa 165 μm - 220 μm haben sollte.

Die mit Standardparametern erreichte Sensitivität liegt für diesen Sensor (abhängig vom TOTnoise) bei über $1.4 \cdot 10^{26}$ Jahre, unter der Voraussetzung, dass kein zusätzlicher Untergrund existiert.

5 Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurde mithilfe von Monte Carlo Simulationen das Potential Timepix-artiger Detektoren zum Nachweis des neutrinolosen doppelten Betazerfalls untersucht. Es konnte gezeigt werden, dass abhängig von den Eigenschaften des Detektors, ein Optimum für die Sensordicke und die Pixelgröße existiert. Dies liegt bei etwa 3 mm Sensordicke und 165 μm - 220 μm Pixelpitch. Es sind aber weitere Untersuchungen notwendig um das Optimum genauer einzugrenzen.

Der Nachweis des $0\nu\beta\beta$ Zerfalls ist schwierig, und ob dies überhaupt möglich ist, hängt von der nicht bekannten Halbwertszeit ab. Es lässt sich daher nicht sagen, ob ein Experiment tatsächlich in der Lage ist diesen Zerfall nachzuweisen, nur ob es neue Grenzen aufzeigen kann und ob die Sensitivität über der bisheriger Experimente liegt.

Ob sich ein experimenteller Ansatz lohnt, entscheidet sich also vor allem daran, wie hoch die erreichbare Sensitivität verglichen mit anderen Ansätzen ist. Nimmt man Experimente mit vergleichbaren Massen und Messzeiten an, so ergibt sich dies vor allem aus wenigen Größen, der Detektionseffizienz, der Energieauflösung und dem Untergrund.

Geht man vom Optimum für den Detektor bei etwa 3 mm Sensordicke und 165 μm - 220 μm Pixelpitch aus, so ist Folgendes zu erwarten:

- Detektionseffizienz: etwa 45 % - 55 % (Abbildung 2.7 und 2.8)
- Energieauflösung: etwa 0.9% - 1.4% (Abbildung 4.4 und 4.10)

Geht man von 400 kg CdTe als Sensormaterial und 3 Jahren Messzeit aus, so liegt damit die Sensitivität auf die Halbwertszeit bei etwa $1.45 \cdot 10^{26}$ a - $1.7 \cdot 10^{26}$ a (Abbildung 4.3 und 4.9), unter der Annahme dass der Untergrund nur aus dem neutrinobehafteten Doppelbetazerfall besteht.

Der größte Vorteil fein pixelierter Detektoren liegt darin, dass sie Informationen über die Spuren von Teilchen im Detektor liefern, wodurch eine Identifikation der Teilchen möglich ist. Dies kann zur Reduktion des Untergrunds verwendet werden.

Es wurde eine Methode zur Trennung von einzelnen Elektronen und $\beta\beta$ -Ereignissen entwickelt. Damit konnte gezeigt werden, dass die Identifikation funktioniert und diese eine deutliche Verbesserung der Sensitivität bewirkt (Abbildung 3.18), selbst wenn nur der am schwierigsten zu identifizierende Untergrund, nämlich einzelne Elektronen betrachtet wird. Es ist zu vermuten, dass sich die Identifikation noch weiter verbessern lässt. Auch hierfür sind aber weitere Untersuchungen notwendig.

Literaturverzeichnis

- [1] C. L. Cowan, Jr., F. Reines, F. B. Harrison, H. W. Kruse and A. D. McGuire
Detection of the Free Neutrino: A Confirmation, Science 124, Juli 1956, S103-104
- [2] Webseite der COBRA collaboration <http://www.cobra-experiment.org> (abgerufen im März 2011)
- [3] Xavier Llopart Cudié: *Design and characterization of 64K pixels chips working in single photon processing mode*, Thesis for the degree Doctor of Technology, Sundsvall 2007
- [4] Webseite der Medipix Kollaboration
<http://medipix.web.cern.ch/medipix/pages/medipix2.php> (abgerufen im März 2011)
- [5] Webseite der Medipix Kollaboration <http://medipix.web.cern.ch/medipix/index.php> (abgerufen im März 2011)
- [6] Oliviero Cremonesi: *Neutrinoless Double Beta Decay: Present and Future*, Nuclear Physics B - Proceedings Supplements, Volume 118, April 2003, S287-296
- [7] P. Beneš, F. Šimkovic, A. Faessler, W.A. Kamiński: *Neutrinoless double β -decay nuclear matrix elements within the SRQRPA*, Progress in Particle and Nuclear Physics 57 (2006) S257-259
- [8] Bogdan Povh, Klaus Rith, Christoph Scholy, Frank Zetschke: *Teilchen und Kerne*, Springer Verlag, 6. Auflage, 2004
- [9] Jürgen Giersch: *Entwicklung einer Monte-Carlo-Simulation und Bau einer Messkammer zur Evaluierung von photonenzählenden Pixel-Röntgendetektoren für die medizinische Bildgebung*, Dissertation, Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg, Juli 2002
- [10] Björn Kreisler: *Simulation of Medical Irradiation and X-Ray Detector Signals*, Dissertation, Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg, Februar 2010
- [11] persönliche Kommunikation mit Björn Kreisler

- [12] J. Fink , H. Krüger, P. Lodomez and N. Wermes: *Characterization of charge collection in CdTe and CZT using the transient current technique*, Physikalisches Institut der Universität Bonn, Januar 2006
- [13] A Cola , I Farella , N Auricchio and E Caroli: *Investigation of the electric field distribution in x-ray detectors by Pockels effect*, J. Opt. A: Pure Appl. Opt. 8 (2006) S467-472
- [14] Michael Böhnelt, Dissertation in Vorbereitung, Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg
- [15] <http://physics.nist.gov/PhysRefData/Star/Text/ESTAR.html> (abgerufen im März 2011)
- [16] Jürgen Durst: *Modellierung und Simulation physikalischer Eigenschaften photo-nenzählender Röntgenpixeldetektoren für die Bildgebung*, Dissertation, Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg, Juli 2008
- [17] X. Llopart, R. Ballabriga, M. Campbell, L. Tlustos, W. Wong: *Timepix, a 65k programmable pixel readout chip for arrival time, energy and/or photon counting measurements*, CERN, Genf, Schweiz, März 2007
- [18] <http://physics.nist.gov/PhysRefData/Star/Text/appendix.html> (abgerufen im März 2011)
- [19] <http://www.physics.nist.gov/PhysRefData/Star/Text/programs.html> (abgerufen im März 2011)
- [20] H. Bethe: *Zur Theorie des Durchgangs schneller Korpuskularstrahlen durch Materie*, Annalen der Physik, Volume 397, Issue 3, 1930, S325-400
- [21] A. Castoldi, E. Gatti, P. Rehak: *Three-Dimensional Analytical Solution of the Laplace Equation Suitable for Semiconductor Detector Design*, IEEE TRANSACTIONS ON NUCLEAR SCIENCE, VOL. 43, NO. 1, FEBRUARY 1996, S256-265
- [22] S. Ramo: *Currents Induced by Electron Motion*, proceedings of the I.R.E, September 1939 Volume 27, Issue 9, S584-585
- [23] O.A.Ponkratenko, V.I.Tretyak, Yu.G.Zdesenko: *Event Generator DECAY4 for Simulating Double-Beta Processes and Decays of Radioactive Nuclei*, Phys. At. Nucl. 63 (2000) 1282 (nucl-ex/0104018)
- [24] Steffen Nissen *Implementation of a Fast Artificial Neural Network Library (fann)*, Department of Computer Science, Oktober 2003, University of Copenhagen (DI-KU)

Danksagung

Zum Abschluss möchte ich mich allen bedanken, die mich bei dieser Arbeit und bei meinem Studium unterstützt haben. Insbesondere bei:

- Prof. Dr. Gisela Anton für die Überlassung des Themas, ihr stets offenes Ohr für Fragen und ihre Betreuung der Arbeit
- Dr. Thilo Michel für die Betreuung der Arbeit und die hilfreichen und interessanten physikalischen Diskussionen
- Dr. Jürgen Durst, der viel Zeit für die Betreuung der Arbeit aufgewendet hat und mir stets technische und physikalische Fragen beantworten konnte
- meinen Zimmerkollegen und der ganzen Medphysgruppe für die sehr angenehme Arbeitsatmosphäre
- größten Dank an meine Familie, insbesondere meinen Eltern, für deren Unterstützung während der Arbeit und des gesamten Studiums

Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die Diplomarbeit selbstständig angefertigt und keine außer den angegebenen Hilfsmitteln verwendet habe.

Erlangen, den 5. April 2011

Thomas Gleixner