

Elektroneneutrino-Untergrund bei der Bestimmung der Neutrinomassenhierarchie mit ORCA

Bachelorarbeit aus der Physik

vorgelegt von
Veronika Ludwig

27. September 2013

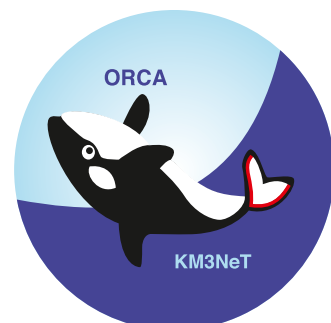


Erlangen Centre for Astroparticle Physics
Physikalisches Institut
Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

1. Gutachter: Dr. Thomas Eberl
2. Gutachter: Prof. Dr. Gisela Anton



ERLANGEN CENTRE
FOR ASTROPARTICLE
PHYSICS



Kurzfassung

Eine bis dato ungeklärte Frage in der Neutrinophysik ist die Frage nach der Neutrinomassenhierarchie. Mithilfe des im letzten Jahr (2012) als überraschend groß bestimmten dritten Mischungswinkels θ_{13} wird eine Bestimmung der Massenhierarchie möglich.

Das ORCA-Projekt beschäftigt sich mit dieser Fragestellung zur Bestimmung der Massenhierarchie mit dem geplanten Neutrino-Teleskop KM3NeT im Mittelmeer und führt Machbarkeitsstudien diesbezüglich durch. Durch Messung atmosphärischer Neutrinos, die beim Durchgang durch die Erde von Materieeffekten beeinflusst werden, ist es möglich, Unterschiede in den Ereignisraten für normale und invertierte Hierarchie zu messen.

Aufbauend auf der Bachelorarbeit von S. Hallmann werden in dieser Arbeit die Ereignisraten und die statistische Asymmetrie zwischen normaler und invertierter Hierarchie für Elektroneneutrinos berechnet. Zunächst gilt es zu überprüfen, inwieweit die Elektroneneutrinos zur Bestimmung der Massenhierarchie beitragen können. Weiterhin wird die Missidentifikationsrate, mit der ein Elektron als ein Myon bzw. ein Myon als ein Elektron detektiert wird, berücksichtigt und so der Einfluss der Elektroneneutrinos als Untergrund bei einer Myoneneutrinomessung bestimmt. Abschließend werden die Sensitivitäten und die zu erwartende Messzeit, bis der Ausschluss einer der Hierarchien möglich ist, für die erhaltenen Ergebnisse sowie für diverse "worst-case"-Szenarien dargestellt und verglichen.

Inhaltsverzeichnis

1. Theoretische Grundlagen	4
1.1. Entstehung atmosphärischer Neutrinos	4
1.2. Neutrino-Oszillationen im Vakuum und in Materie	5
1.3. Bestimmung der Neutrinomassenhierarchie mit ORCA	13
2. Bestimmung der Elektronneutrino-Ereignisraten	18
2.1. Fluss atmosphärischer Neutrinos	18
2.2. Oszillationswahrscheinlichkeiten	19
2.3. Detektion mit ORCA: Effektives Volumen für Elektronneutrinos	20
2.4. Bestimmung der Ereignisraten und Asymmetrie für Elektronneutrinos	21
2.5. Kinematische Verschmierung	23
2.6. Log-Likelihood-Quotient	24
2.7. P-Value	26
3. Vergleich der Ergebnisse für Elektron- und Myonneutrinos	27
4. Einfluss der Missidentifikationsrate auf die Messung von Myonneutrinos	29
4.1. Unterschiede in der Detektion von Elektron und Myon	30
4.2. Einfluss der Teilchenidentifikation auf Myonneutrino-Ereignisrate	32
4.3. P-Value-Entwicklung für Myonneutrino-Ereignisse	35
4.4. Erforderliche Messzeit für ORCA	36
5. Zusammenfassung und Ausblick	38
6. Literaturverzeichnis	39
A. Einfluss der Breite der Winkelverteilung in der Richtungsrekonstruktion eines Elektrons als Myon	42

1. Theoretische Grundlagen

1.1. Entstehung atmosphärischer Neutrinos

Atmosphärische Neutrinos entstehen durch das Auftreffen kosmischer Strahlung auf die Erdatmosphäre. Diese kosmische Strahlung, die zu etwa 99% aus Protonen besteht, weist ein Energiespektrum auf, das durch ein Potenzgesetz beschrieben wird:

$$N(E) \propto E^{-\gamma} \text{ mit } \gamma = -2.7 \text{ für } E \leq 10^{15} \text{ eV}$$

Hochenergetische Teilchen treffen also seltener auf die Atmosphäre auf. Durch Reaktionen der Protonen mit Stickstoff- oder Sauerstoffatomkernen werden Teilchen erzeugt, die ihrerseits wieder Reaktionen auslösen. Es entsteht eine atmosphärische Teilchenkaskade, ein Luftschauer. Die dabei erzeugten Mesonen sind zum Großteil geladene Pionen und Kaonen. Diese zerfallen letztlich in $e^\pm$ und Neutrinos.

$$\begin{aligned} p + N &\rightarrow \pi^\pm, K^\pm, \dots \\ &\hookrightarrow \begin{array}{ll} \pi^+, K^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu & \pi^-, K^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu \\ \mu^+ \rightarrow e^+ \nu_e \bar{\nu}_\mu & \mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu \end{array} \end{aligned}$$

Bei den durch die Protonen ausgelösten Kaskaden werden überwiegend positive Mesonen erzeugt, sodass im weiteren Zerfallsprozess mehr Elektronneutrinos als Antielektronneutrinos entstehen. Des Weiteren ergibt sich als Verhältnis r der produzierten Myonneutrinos¹ zu den Elektronneutrinos

$$r = \frac{\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu}{\nu_e + \bar{\nu}_e} \approx 2$$

Diese Näherung gilt für den Fall, dass alle produzierten Myonen zerfallen und daher ein doppelt so großer Myonneutrinofluss wie Elektronneutrinofluss zu erwarten ist [1].

Bei hohen Energien erreichen einige Myonen die Erdoberfläche, bevor sie zerfallen. Dies führt dazu, dass im Verhältnis noch deutlich mehr Myonneutrinos als Elektronneutrinos erzeugt werden (Abb. 1) [2].

Eine der aktuellsten Berechnungen der atmosphärischen Neutrino Flüsse erfolgt durch HKKM (Honda, Kajita, Kasahara, Midorikawa) mit dem Wechselwirkungsmodell JAM, das gute Ergebnisse für Projektilteilchen niedriger Energien $\ll 0.1$ GeV bis zu Energien ~ 100 GeV liefert [3].

¹hier sind i. Allg. auch immer die Antineutrinos gemeint, falls diese nicht explizit erwähnt werden

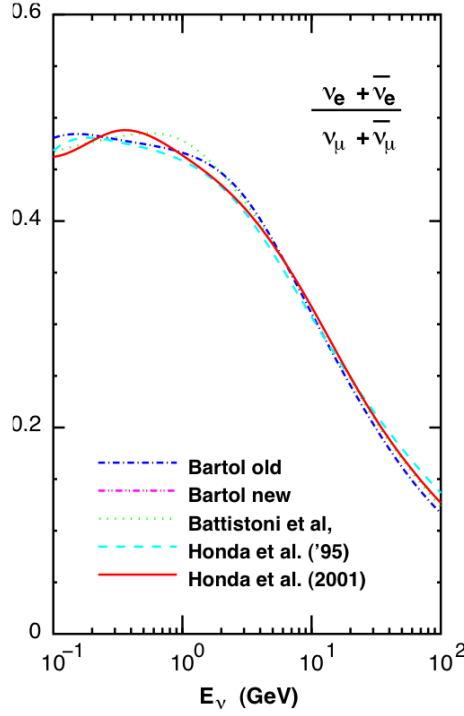


Abbildung 1: Verhältnis der Flüsse $\frac{\nu_e + \bar{\nu}_e}{\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu}$ [2]

1.2. Neutrino-Oszillationen im Vakuum und in Materie

Nach der Entstehung der Neutrinos in der Atmosphäre zeigt sich bei der Propagation durch den Raum eine Besonderheit der Neutrinos: Eine Flavouart wandelt sich mit der Zeit in eine andere um, die Leptonflavourzahl ist nicht erhalten.

Die Wahrscheinlichkeit für den Übergang einer Neutrinosorte in eine andere ändert sich periodisch mit der Zeit, sodass ein erzeugtes Elektronneutrino nach einer gewissen Strecke mit hoher Wahrscheinlichkeit als Myonneutrino (indirekt, über ein Myon) detektiert werden kann, einige Zeit später die Wahrscheinlichkeit für einen Übergang jedoch sehr gering ist. Aufgrund der oszillierenden Übergangswahrscheinlichkeiten spricht man von Neutrino-Oszillationen.

Grund für dieses Phänomen ist die Unterscheidung der Flavoureigenzustände $|\nu_\alpha\rangle$, die an der schwachen Wechselwirkung teilnehmen, von den Masseneigenzuständen $|\nu_i\rangle$, die im Vakuum propagieren. Die Flavoureigenzustände sind keine Eigenzustände zum Massenoperator M :

$$\langle \nu_\alpha | M | \nu_\beta \rangle \neq 0 \text{ für } \alpha \neq \beta$$

Flavoureigenzustände $|\nu_\alpha\rangle$ besitzen damit keine scharfe Masse. Stattdessen sind sie als Linearkombination (Mischungen) der Masseneigenzustände $|\nu_i\rangle$ darstellbar.

Da die Masseneigenzustände die Eigenzustände zum Massenoperator sind, gilt:

$$\langle \nu_i | M | \nu_j \rangle = m_i \delta_{ij} \text{ und } m_i \neq m_j \text{ für } i \neq j$$

Aus der Überlagerung der Masseneigenzustände und ihrer unterschiedlichen Zeitentwicklung ergeben sich so Neutrino-Oszillationen [1].

Neutrino-Oszillationen im Vakuum

Der Zusammenhang zwischen Flavoureigenzuständen und Masseneigenzuständen im Vakuum ist über die unitäre Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata Mischungsmatrix U_{PMNS} gegeben [4]:

$$\begin{aligned} U_{PMNS} &\equiv U = U_{23} I_\delta U_{13} U_{12} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\delta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13}e^{i\delta} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{13}c_{23}e^{i\delta} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mit $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$, $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$ und δ als CP-verletzende Phase. Die Winkel θ_{ij} werden als Mischungswinkel bezeichnet. Durch die Mischungsmatrix lassen sich die Zustände folgendermaßen ausdrücken:

$$\begin{aligned} |\nu_\alpha\rangle &= \sum_i U_{\alpha i} |\nu_i\rangle \\ |\nu_i\rangle &= \sum_\alpha (U^\dagger)_{i\alpha} |\nu_\alpha\rangle = \sum_\alpha U_{\alpha i}^* |\nu_\alpha\rangle \end{aligned}$$

Aufgrund der unterschiedlichen Größe der Massen m_i der Zustände $|\nu_i\rangle$ ($i = 1, 2, 3$) unterscheiden sich die Ausbreitungsgeschwindigkeiten der Masseneigenzustände. Es kommt in der Zeitentwicklung der Masseneigenzustände zu einer Phasenverschiebung:

$$|\nu_i(t)\rangle = e^{-iE_i t} |\nu_i\rangle \text{ mit } E_i = \sqrt{p^2 + m_i^2} \approx E + \frac{m_i^2}{2E}$$

wobei E die Energie und $p \approx E$ (da $m_i \ll p$) der Impuls des Neutrinos ist. In Abb. 2 ist die Zeitentwicklung der Masseneigenzustände für zwei Neutrino-Flavours, dargestellt. Für die Zeitentwicklung eines Flavourzustandes ergibt sich für ein zum Zeitpunkt $t = 0$ erzeugtes $|\nu(0)\rangle = |\nu_\alpha\rangle$:

$$|\nu(t)\rangle = \sum_i U_{\alpha i} e^{-iE_i t} |\nu_i\rangle = \sum_{i,\beta} U_{\alpha i} U_{\beta i}^* e^{-iE_i t} |\nu_\beta\rangle$$

Die Entwicklung eines Zustandes $|\nu_\alpha\rangle$ in einen Flavourzustand $|\nu_\beta\rangle$ ist somit möglich. Neutrinos bewegen sich nahezu mit Lichtgeschwindigkeit, sodass die Zeit t durch die

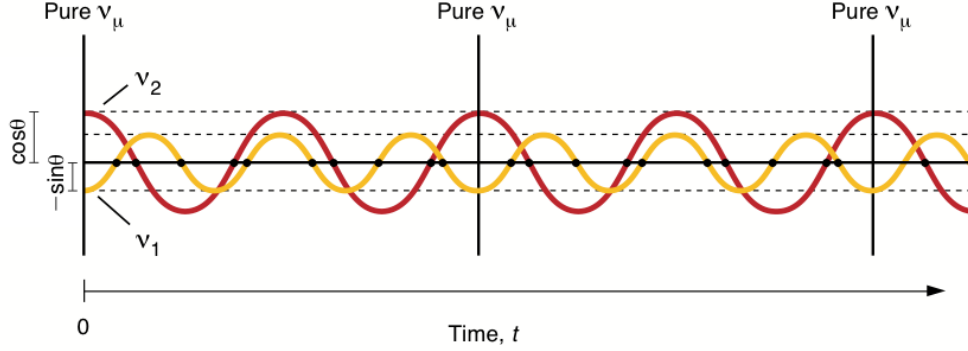


Abbildung 2: Ein ν_μ bei $t = 0$ wird durch Überlagerung der Amplituden der Masseneigenzustände ν_1 und ν_2 beschrieben. Aus $m_1 \neq m_2$ resultiert eine Phasenverschiebung für $t > 0$. Dies bedingt eine Mischung von ν_e und ν_μ , es liegt kein reines ν_μ mehr vor [5].

Propagationsstrecke $L = c \cdot t$ ersetzt werden kann. Auf diese Weise ergibt sich eine Übergangsamplitude für einen Übergang eines Flavourzustandes α in einen Flavourzustand β mit:

$$A(\alpha \rightarrow \beta; L) = \sum_i U_{\alpha i} U_{\beta i}^* \exp \left(-i \frac{m_i^2}{2} \cdot \frac{L}{E} \right)$$

Hieraus lässt sich bekanntermaßen die Übergangswahrscheinlichkeit aus dem Betragsquadrat der Amplitude bestimmen:

$$\begin{aligned} P(\alpha \rightarrow \beta; L) &= |A(\alpha \rightarrow \beta; L)|^2 = \sum_{i,j} U_{\alpha i} U_{\alpha j}^* U_{\beta i} U_{\beta j}^* e^{-i \Delta_{ij}} \\ &= \delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{j>i} U_{\alpha i} U_{\alpha j}^* U_{\beta i} U_{\beta j}^* \sin^2 \frac{\Delta_{ij}}{2} \quad \text{mit } \Delta_{ij} = \frac{\delta m_{ij}^2}{2} \cdot \frac{L}{E} \end{aligned}$$

Der Term Δ_{ij} bezeichnet die Phasendifferenz. Die eingehenden Größen sind die Betragsquadrate der Massendifferenz $\delta m_{ij}^2 = m_i^2 - m_j^2$ sowie die Propagationsstrecke L und die Energie E des Neutrinos.

Wird der Fall $n = 2$ betrachtet, d.h. es existieren nur zwei Neutrinosorten, z.B. ν_e und ν_μ , so ist die Wahrscheinlichkeit für einen Übergang eines Elektronneutrinos in ein Myonenneutrino gegeben durch

$$P(e \rightarrow \mu; L) = \sin^2 2\theta \sin^2 \frac{\Delta}{2}$$

In Abb. 3 sind die Oszillationswahrscheinlichkeiten $P(\alpha \rightarrow \alpha)$ und $P(\alpha \rightarrow \beta)$ über die Phasendifferenz $\Delta \propto L/E$ aufgetragen.

Weiterhin lässt sich aus der Zeitentwicklungsgleichung für die Masseneigenzustände durch

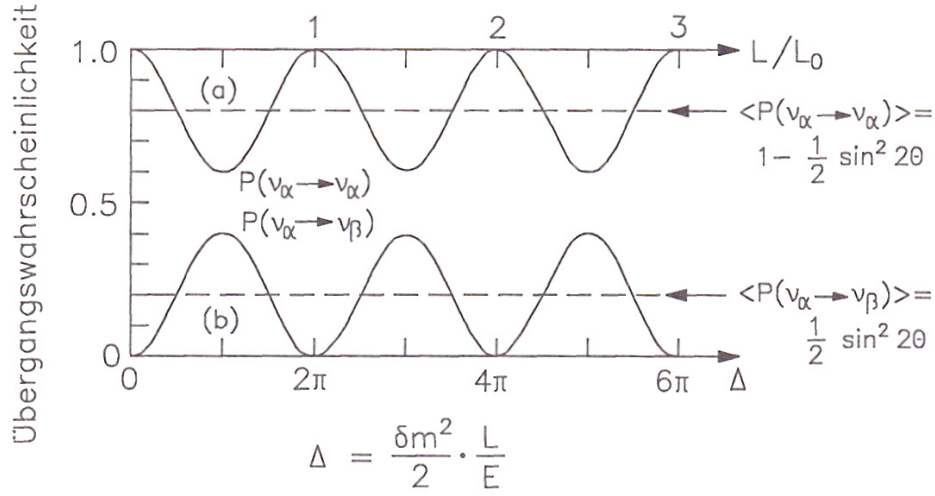


Abbildung 3: Oszillationswahrscheinlichkeiten für den Fall $n = 2$ für $P(\alpha \rightarrow \alpha)$ (obere Kurve) und $P(\alpha \rightarrow \beta)$ mit $\sin^2 2\theta = 0.4$ [1]

Differentiation die Bewegungsgleichung

$$i \frac{d\nu(t)}{dt} = H^i \nu(t) \quad \text{mit } \nu = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix} \quad \text{und } H_{ij}^i = \frac{m_i^2}{2p} \delta_{ij}$$

bestimmen, wobei H^i die Hamilton bzw. Massenmatrix in der ν_i -Darstellung ist. Durch die Beziehung $\nu = U^+ \nu'$ ($\nu' = (\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau)^T$) ergibt sich die analoge Bewegungsgleichung in der ν_α -Darstellung mit $H^\alpha = U H^i U^+$:

$$i \frac{d\nu'(t)}{dt} = H^\alpha \nu(t)$$

Die Hamiltonmatrix in ν_i -Darstellung ist diagonal, da die Masseneigenzustände die Eigenzustände zum Massenoperator sind.

Für den Fall $n = 2$, d.h. es werden nur zwei Neutrino flavours ν_e und ν_μ betrachtet, ergeben sich folgende Hamiltonmatrizen in ν_i - und ν_α -Darstellung:

$$\begin{aligned} H^i &= \frac{1}{2p} \begin{pmatrix} m_1^2 & 0 \\ 0 & m_2^2 \end{pmatrix} \\ H^\alpha &= \frac{1}{2p} \begin{pmatrix} m_{ee}^2 & m_{e\mu}^2 \\ m_{e\mu}^2 & m_{\mu\mu}^2 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2p} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1^2 & 0 \\ 0 & m_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{4p} (m_1^2 + m_2^2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4p} \underbrace{D}_{m_2^2 - m_1^2} \begin{pmatrix} -\cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Der erste Term ist physikalisch unbedeutend, da sich aufgrund der Einheitsmatrix nur ein gemeinsamer Phasenfaktor ergibt. Interessant ist der zweite Term, der für ein $\theta \neq 0$ die Mischung der Neutrino flavours bewirkt [1].

Neutrino-Oszillationen in Materie

Sobald die Neutrinos durch Materie propagieren, verändert sich die Hamiltonmatrix und wird durch einen Zusatzterm ergänzt. Diese Änderung ist begründet in der Wechselwirkung der Neutrinos mit den Elektronen der Materie.

Im Allgemeinen kommt es in der Materie zum einen zu einer elastischen Neutrino-Quark-Streuung, die für alle Neutrinos identisch ist, zum anderen können die Neutrinos auch elastisch mit den Elektronen streuen. Für die Myon- und die Tau-Neutrinos handelt es sich dabei lediglich um eine NC-Wechselwirkung (neutral current), während für die Elektron-Neutrinos zusätzlich eine CC-Wechselwirkung (charged current) durch W-Austausch stattfindet (Abb. 4).

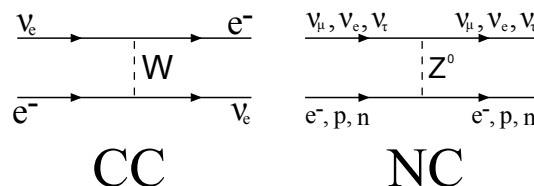


Abbildung 4: CC- und NC-Wechselwirkung

Die Elektron-Neutrinos erhalten auf diese Weise einen zusätzlichen Wechselwirkungsterm, der sich in der Differenz der Vorwärtsstreuamplituden $f_\alpha(0)$ bemerkbar macht:

$$f_e(0) - f_\mu(0) = -\frac{G_F p}{\sqrt{2}\pi} \quad \text{mit } G_F = 1.1664 \cdot 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$$

wobei G_F die Fermi-Kopplungskonstante und p der Impuls des Teilchens ist. Für Anti-neutrinos gilt das entgegengesetzte Vorzeichen [1].

Anschaulicher wird der Effekt mithilfe der Analogie zur Optik. Fällt Licht auf ein Medium, streut es an den einzelnen Molekülen. Dies bedeutet, das E-Feld der Lichtwelle regt die Moleküle zu Schwingungen an, die dadurch ihrerseits Wellen derselben Frequenz, allerdings mit einer Phasenverschiebung zur einfallenden Welle, aussenden (Abb. 5). Durch Überlagerung ergibt sich eine effektive Wellenlänge $\lambda_m = \lambda/n$, wobei n der materialspezifische Brechungsindex ist. Bei gleich bleibender Frequenz ergibt sich so eine Lichtgeschwindigkeit $c_m = c/n$ im Medium [6].

Ebenso wie ein Photon, sieht auch ein Neutrino, das sich durch die Wellenfunktion $\exp(ipx - iEt)$ (p Impuls des Teilchens, x der Ort, an dem es sich befindet und E seine Energie) darstellen lässt, einen Brechungsindex. Die de-Broglie-Wellenlänge ändert sich

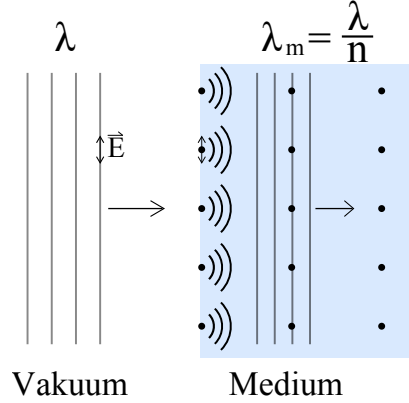


Abbildung 5: Vorwärtsstreuung in der Optik: Das E-Feld einer einfallenden Lichtwelle regt die Moleküle in einem Medium zu Schwingungen an, die wiederum Licht derselben Frequenz phasenverschoben zur einfallenden Welle aussenden. Durch Überlagerung ergibt sich eine effektive Wellenlänge im Medium.

ebenfalls um den Faktor $1/n$. Entscheidend ist nun, dass durch den zusätzlichen Wechselwirkungsterm durch W-Austausch für die Elektroneneutrinos ein anderer Brechungsindex

$$n_{CC} = \frac{\sqrt{2}\pi N_e}{p^2} f_{CC} = \frac{\sqrt{2}G_F N_e}{p}$$

gilt, als für ν_μ und ν_τ . Bewegen sich die Neutrinos durch Materie, ergibt sich der zusätzliche Phasenterm $\exp(ip(n-1)x)$. Für Myon- bzw. Tauneutrinos beträgt die Phase $\exp(ip(n_{NC}-1)x)$, während die Phase für das Elektroneneutrino durch $\exp(ip(n_{NC}+n_{CC}-1)x)$ gegeben ist [5].

Wenn der gemeinsame Phasenfaktor $\exp(ip(n_{NC}-1)x)$ herausgenommen wird, bedeutet dies (für den Fall $n=2$) für die Hamilton-Matrix eine Erweiterung um einen Term

$$A = 2\sqrt{2}G_F N_e E$$

in der m_{ee}^2 -Komponente:

$$H_m^\alpha = H^\alpha + \frac{1}{2p} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2p} \begin{pmatrix} m_{ee}^2 + A & m_{e\mu}^2 \\ m_{e\mu}^2 & m_{\mu\mu}^2 \end{pmatrix} \quad (A \rightarrow -A \text{ für } \bar{\nu})$$

Die Elektronendichte N_e spielt hier eine bedeutende Rolle. Durch Transformation zurück in die ν_i -Darstellung ergibt sich nun eine Massenmatrix, die nicht mehr diagonal ist:

$$H_m^i = U^\dagger H_m^\alpha U = \frac{1}{2p} \begin{pmatrix} m_1^2 + A \cos^2 \theta & A \cos \theta \sin \theta \\ A \cos \theta \sin \theta & m_2^2 + A \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

Die Masseneigenzustände im Vakuum entsprechen also nicht denen in Materie. Durch Diagonalisieren von H_m^α werden die Masseneigenwerte in Materie bestimmt:

$$m_{1,2m}^2 = \frac{1}{2} \left[(m_1^2 + m_2^2 + A) \mp \sqrt{(A - D \cos 2\theta)^2 + D^2 \sin^2 2\theta} \right] \quad (1)$$

Mit dem Resonanzfaktor

$$R = \left(\frac{A}{D} - \cos 2\theta \right)^2 + \sin^2 2\theta$$

lassen sich die Vakuumwerte in die entsprechenden Formeln für Materie zur Bestimmung der Oszillationswahrscheinlichkeiten umrechnen:

$$D_m = D\sqrt{R} \quad (2)$$

$$\sin^2 2\theta_m = \frac{1}{R} \sin^2 2\theta \quad (3)$$

Die Oszillationswahrscheinlichkeiten ergeben sich daraus analog zu denen im Vakuum. Für eine Elektronendichte $N_e = 0$ (also im Vakuum) wird der Resonanzfaktor $R = 1$ und man erhält die Vakuumwerte. Mit der Resonanzbedingung

$$\frac{A}{D} = \cos 2\theta$$

wird die Oszillationsamplitude $\sin^2 2\theta$ maximal unabhängig vom Vakuummischungswinkel θ . Je größer θ ist, desto breiter ist die Resonanz (Abb. 6).

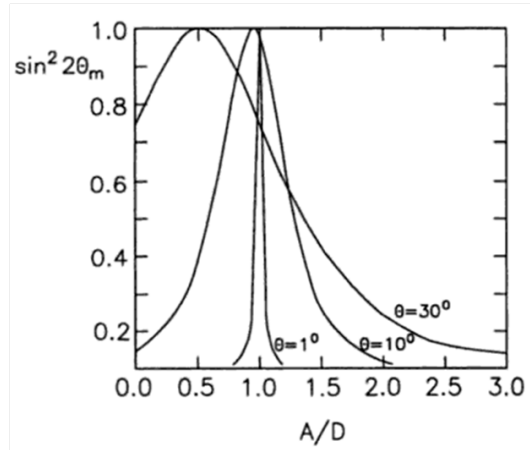


Abbildung 6: Abhängigkeit der Oszillationsamplitude in Materie vom Verhältnis A/D für verschiedene Werte des Vakuummischungswinkels θ ($\theta = 1^\circ, 10^\circ, 30^\circ$) [1]

Materieeffekte bewirken also eine resonante Verstärkung der Oszillationswahrscheinlichkeiten. Aus der Resonanzbedingung ergibt sich die Resonanzenergie, bei der es zur Maximierung der Oszillationswahrscheinlichkeit kommt:

$$E = \frac{D}{2N_e} \frac{\cos 2\theta}{\sqrt{2}G_F}$$

Ebenso lässt sich diese Gleichung nach der Elektronendichte N_e umstellen, um so für feste Neutrinoenergien Bereiche zu finden, in denen die Oszillationsamplitude maximiert wird [1].

MSW-Effekt

Benannt nach Mikheyev, Smirnov und Wolfenstein beschreibt der MSW-Effekt die Resonanzeffekte in Materie, die bei adiabatischer Änderung der Elektronendichte auftreten. Die Auswirkungen einer sich stetig ändernden Dichte werden deutlich bei Betrachtung der Masseneigenwerte $m_{1,2m}^2$ mit den Annahmen $m_1^2 \approx 0$ und $m_2^2 > 0$. Für $\theta = 0$ ergibt sich nach Gl. (3) auch ein Mischungswinkel $\theta_m = 0$ in Materie. Dies hat wiederum zur Folge, dass mit

$$\begin{pmatrix} \nu_{1m} \\ \nu_{2m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_m & -\sin \theta_m \\ \sin \theta_m & \cos \theta_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix}$$

mit Gl. (1) folgt, dass

$$\begin{aligned} \nu_{1m} &= \nu_1 = \nu_e & \text{mit } m_{1m}^2 &= A \\ \nu_{2m} &= \nu_2 = \nu_\mu & \text{mit } m_{2m}^2 &= m_2^2 \end{aligned}$$

Wird nun ein kleines $\theta > 0$ für den Vakuummischungswinkel angenommen, so verändern sich die Abhängigkeiten des Mischungswinkels in Materie mit der Elektronendichte. Für den Vakuumfall, $A = 0$, entspricht θ_m dem Vakuumwert θ , sodass sich folgende Zusammenhänge ergeben:

$$\begin{aligned} \nu_{1m} &= \nu_1 \approx \nu_e & \text{mit } m_{1m}^2 &= 0 \\ \nu_{2m} &= \nu_2 \approx \nu_\mu & \text{mit } m_{2m}^2 &= m_2^2 \end{aligned}$$

Bei hoher Elektronendichte wird $\theta_m \approx 90^\circ$, was zur Folge hat, dass

$$\begin{aligned} \nu_{1m} &\approx -\nu_\mu & \text{mit } m_{1m}^2 &= m_2^2 \\ \nu_{2m} &\approx \nu_e & \text{mit } m_{2m}^2 &\approx A \end{aligned}$$

Bewegen sich die Neutrinos also durch Materie mit variabler Elektronendichte, so durchlaufen sie (bei genügend hoher Energie) Bereiche, in denen die Resonanzbedingung erfüllt ist. Durch die Maximierung der Oszillationswahrscheinlichkeit für einen Flavourübergang, sorgt diese Resonanzdichte für einen Flavourflip. Verdeutlicht wird dieses Phänomen anhand von Abb. 7 für das Beispiel von Neutrinos, die in der Sonne entstehen (von rechts beginnend) und einen Flavourflip durch das Durchfahren der Resonanz auf dem Weg zum Rand der Sonne erfahren.

Die sich kreuzenden, gepunkteten Geraden ergeben sich im Fall von $\theta = 0$ aus (1):

$$\begin{aligned} m_{1,2m}^2 &= \frac{1}{2} [(m_1^2 + m_2^2 + A) \mp |A - m_2^2 + m_1^2|] \\ m_{1m}^2 &= \begin{cases} m_2^2 & \text{für } A \geq D \\ m_1^2 + A & \text{für } A \leq D \end{cases} \\ m_{2m}^2 &= \begin{cases} m_1^2 + A & \text{für } A \geq D \\ m_2^2 & \text{für } A \leq D \end{cases} \end{aligned}$$

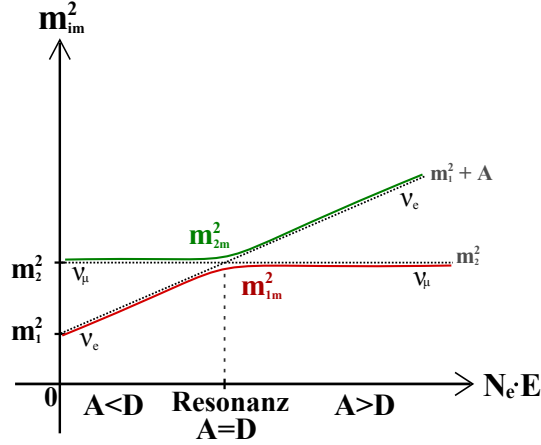


Abbildung 7: Abhängigkeit der Quadrate der Materieeigenzustände m_{im}^2 von $N_e \cdot E$

Für kleine $\theta > 0$ ergeben sich die Kurven für die Materieeigenzustände ν_{1m} (rot) und ν_{2m} (grün). Bei Entstehung eines Elektronneutrinos in der Sonne gilt $A/D \gg 1$, sodass $\theta_m \approx 90^\circ$ und daraus

$$\nu_e = \nu_{1m} \cos \theta_m + \nu_{2m} \sin \theta_m \approx \nu_{2m}$$

folgt. Durch adiabatische Änderung der Dichte existieren keine Übergänge der Materieeigenzustände $\nu_{1m} \leftrightarrow \nu_{2m}$, sodass im Falle des entstandenen Elektronneutrinos die Neutrinos im Zustand ν_{2m} bleiben. Sobald die Resonanzbedingung erfüllt ist ($A/D = \cos 2\theta \approx 1$), liegt maximale Mischung und maximale Übergangswahrscheinlichkeit vor:

$$\nu_{2m} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\nu_e + \nu_\mu)$$

Am Rand der Sonne nähert sich θ_m dem Vakuumwert θ an, sodass

$$\nu_{2m} = \nu_e \sin \theta + \nu_\mu \cos \theta$$

gilt. Für einen kleinen Vakuumwert θ resultiert damit eine hohe Wahrscheinlichkeit

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu) = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta_m \cos 2\theta)$$

dafür, dass sich das Elektronneutrino bei Ankunft am Rand der Sonne in ein Myonneutrino umgewandelt hat.

Derartige Materieeffekte treten in ähnlicher Weise für die atmosphärischen Neutrinos beim Durchgang durch die Erde auf, wobei zu beachten ist, dass das Dichteprofil der Erde in Stufen verläuft (vgl. Kap. 1.3, Abb. 11).

1.3. Bestimmung der Neutrinomassenhierarchie mit ORCA

Aus verschiedensten Messungen konnten bereits einige Neutrinoparameter bestimmt werden (s. Abb. 8).

Parameter	Best fit	1σ range	2σ range	3σ range
Δm_{21}^2 [10^{-5} eV^2]	7.62	7.43–7.81	7.27–8.01	7.12–8.20
Δm_{31}^2 [10^{-3} eV^2]	2.55	2.46–2.61	2.38–2.68	2.31–2.74
	2.43	2.37–2.50	2.29–2.58	2.21–2.64
$\sin^2 \theta_{12}$	0.320	0.303–0.336	0.29–0.35	0.27–0.37
$\sin^2 \theta_{23}$	0.613 (0.427) ^a	0.400–0.461 and 0.573–0.635	0.38–0.66	0.36–0.68
	0.600	0.569–0.626	0.39–0.65	0.37–0.67
$\sin^2 \theta_{13}$	0.0246	0.0218–0.0275	0.019–0.030	
	0.0250	0.0223–0.0276	0.020–0.030	0.017–0.033
δ	0.80π	$0 - 2\pi$	$0 - 2\pi$	$0 - 2\pi$
	-0.03π			

Abbildung 8: Neutrinoparameter [8]

So wird die Mischungsmatrix parametrisiert durch die drei Mischungswinkel θ_{12} , θ_{23} und θ_{13} und der CP-verletzenden Phase δ_{CP} (noch unbekannt). Durch Experimente zur Neutrino-Oszillation ist es möglich, die Differenzen der Massenquadrate $\Delta m_{ij}^2 = m_i^2 - m_j^2$ (mit $i, j = 1, 2, 3$) zu bestimmen, wobei zwischen einer kleinen und einer großen Massendifferenz (δm^2 und Δm^2) unterschieden wird. Die absoluten Neutrinomassen sind bis dato unbekannt, ebenso wie die Neutrinomassenhierarchie (Abb. 9), d.h. die Reihenfolge der Masseneigenzustände ist bisher ungeklärt.

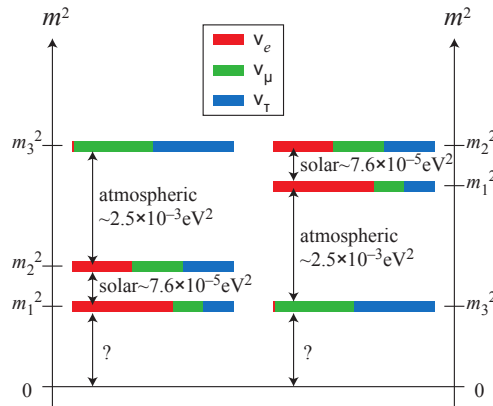


Abbildung 9: Massenhierarchie [9]

Bekannt ist, dass $m_1 < m_2$ ist, unbekannt ist jedoch, ob für den dritten Masseneigenzustand $m_3 < m_1$ oder $m_3 > m_2$ gilt. Die beiden Fälle werden bezeichnet als normale Hierarchie (NH) und invertierte Hierarchie (IH) [7] :

$$\mathbf{NH:} \quad m_1 < m_2 < m_3 \quad \text{mit } \Delta m_{21}^2 \equiv \delta m^2 \text{ und } \Delta m_{32}^2 \simeq \Delta m_{31}^2 \equiv \Delta m^2$$

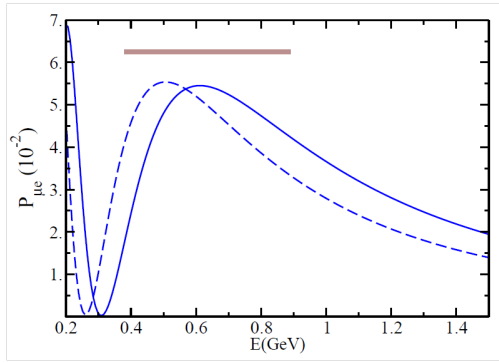
$$\mathbf{IH:} \quad m_3 < m_1 < m_2 \quad \text{mit } \Delta m_{21}^2 \equiv \delta m^2 \text{ und } \Delta m_{23}^2 \simeq \Delta m_{13}^2 \equiv \Delta m^2$$

Realisierbar wird die Bestimmung der Massenhierarchie durch den erst kürzlich (2012) in unterschiedlichen Beschleuniger- und Reaktorexperimenten (Daya Bay, T2K, MINOS, RENO, Double Chooz) als überraschend groß gemessenen Mischungswinkel θ_{13} , da auf

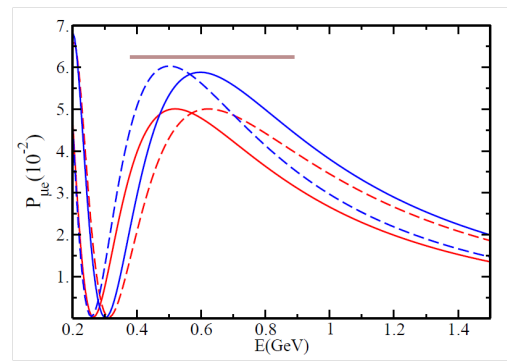
diese Weise durch die Materieeffekte messbare Unterschiede in den Oszillationswahrscheinlichkeiten für normale Hierarchie und invertierte Hierarchie vorhanden sind [10].

Neutrinoteleskop: Wasser-Cherenkov-Detektor

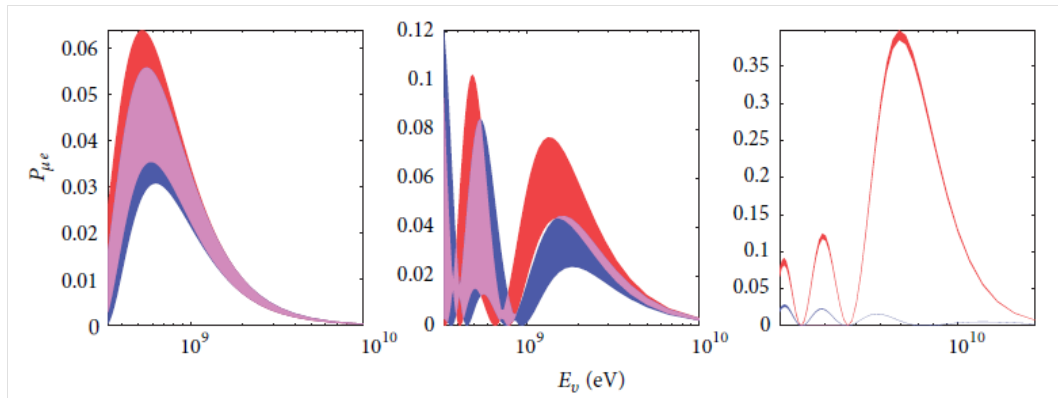
Wasser- (bzw. Eis-) Cherenkov-Detektoren bieten eine gute Möglichkeit die Neutrinomassenhierarchie mit atmosphärischen Neutrinos zu bestimmen. Im Vergleich zu Beschleuniger-Experimenten sind die Neutrinoexperimente mit atmosphärischen Neutrinos zwar im Nachteil bezüglich diverser Unsicherheiten, wie z.B. im Neutrinofluss, allerdings gibt es einen großen Vorteil: Neutrinos, die in der Atmosphäre entstehen, propagieren durch die Erde und besitzen damit eine deutlich größere Baseline. Des Weiteren treten Materieeffekte beim Durchgang durch die Erde auf, die die Bestimmung der Massenhierarchie ermöglichen (Abb. 10). Auch der Energiebereich der atmosphärischen Neutrinos ist deutlich größer, sodass verschiedenste Abstands-Energie-Verhältnisse L/E möglich sind [7].



(a) gestrichelt: NH/ θ_{13} neg. oder IH/ θ_{13} pos.; durchgezogen: NH/ θ_{13} pos. oder IH/ θ_{13} neg.



(b) gestrichelt: θ_{13} negativ; durchgezogen: θ_{13} positiv; blau: NH; rot: IH



(c) Verschiedene Baselines (295 km, 820 km, 7500 km); rot: IH, blau: NH, Breite des Bandes durch CP-verletzende Phase δ

Abbildung 10: Übergangswahrscheinlichkeit eines $\nu_m u$ in ein ν_e $P_{\mu e}$ unter Einfluss von Materieeffekten (oben, [11]) und Baselines ([4])

Durchqueren die Neutrinos die Erde (Abb. 11), so können sie entweder nur durch den Erdmantel oder auch durch den Erdkern propagieren. Das Dichteprofil der Erde zeigt hier eine deutliche Stufe, die in den Oszillogrammen im späteren Kapitel 2.2 zu sehen ist.

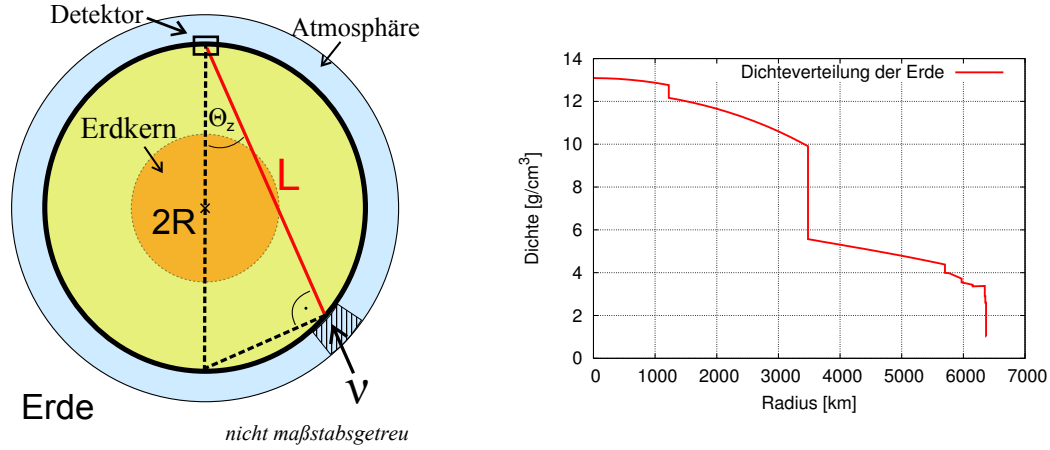


Abbildung 11: Weg der Neutrinos durch die Erde und Dichteverteilung Erde (PREM, [12])

Zur Bestimmung der Massenhierarchie werden die erwarteten Ereignisraten für NH bzw. für IH für einen bestimmten Energie- und Zenitwinkelbereich (Richtung $\rightarrow$ unterschiedliche Baseline L) berechnet und die Unterschiede zwischen den entstehenden Histogrammen untersucht.

Da die ungeladenen, nur schwach wechselwirkenden Neutrinos nicht direkt detektiert werden können, erfolgt ihr Nachweis indirekt über ihre Reaktion mit Materie. Durch tief-inelastische Neutrino-Nukleon-Streuung, die entweder über $W^\pm$ - oder Z^0 -Austausch abläuft, entstehen bei CC-Wechselwirkung geladene Leptonen [1].

$$\begin{aligned} \text{CC} : \nu_\mu + N &\rightarrow \mu^- + X \quad , \quad \bar{\nu}_\mu + N \rightarrow \mu^+ + X \\ \text{NC} : \nu_\mu + N &\rightarrow \nu_\mu + X \quad , \quad \bar{\nu}_\mu + N \rightarrow \bar{\nu}_\mu + X \quad (\text{analog für } \nu_e, e^\pm) \end{aligned}$$

Die Detektion der durch die Neutrinos in Reaktionen am Nukleon entstandenen Leptonen erfolgt mittels Cherenkovlicht. Bewegt sich ein Teilchen in einem Medium schneller als das Licht mit der effektiven Lichtgeschwindigkeit c/n (c : Vakuumlichtgeschwindigkeit, n : Brechungsindex) im Medium, so emittiert das Teilchen Cherenkovphotonen. Der Winkel zur Bahn des Teilchens, unter dem diese Photonen emittiert werden, ist abhängig von der Geschwindigkeit $\beta = v/c$ des Teilchens:

$$\cos \theta = \frac{1}{\beta n}$$

Ergebnis ist eine elektromagnetische Schockwelle wie sie in Abb. 12 dargestellt ist. In Wasser beträgt der maximale Öffnungswinkel 42° [13].

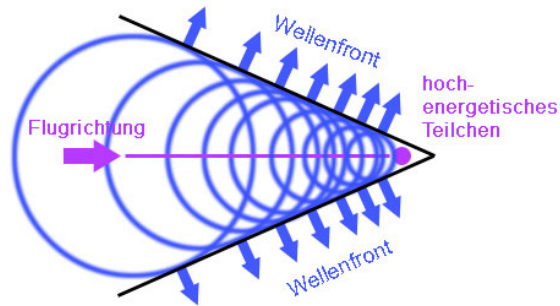


Abbildung 12: Cherenkovkegel in Wasser [14]

KM3NeT - ORCA

Neben IceCube am Südpol und dem PINGU-Projekt [15] beschäftigt sich auch das Projekt ORCA (*Oscillation Research with Cosmics in the Abyss*) mit der Bestimmung der Massenhierarchie. Es werden mögliche Detektorsetups untersucht, die im Rahmen des zukünftigen multi-km³ Neutrinoobservatoriums KM3NeT im Mittelmeer realisiert werden können. Diese Arbeit verwendet das aus 50 KM3NeT-Strings bestehende ORCA-Detektorsetup. Die Strings werden unregelmäßig in einem Radius von 70 Metern auf dem Meeresboden platziert. An jedem String befinden sich 20 DOMs (digital optical modules) mit Abständen von 6 m (Abb. 13). In jedem DOM wiederum befinden sich 31 Photomultiplier, die das durch die Leptonen ausgesendete Cherenkovlicht detektieren sollen. Daraus lassen sich schließlich Richtung und Energie der Neutrinos rekonstruieren [16].

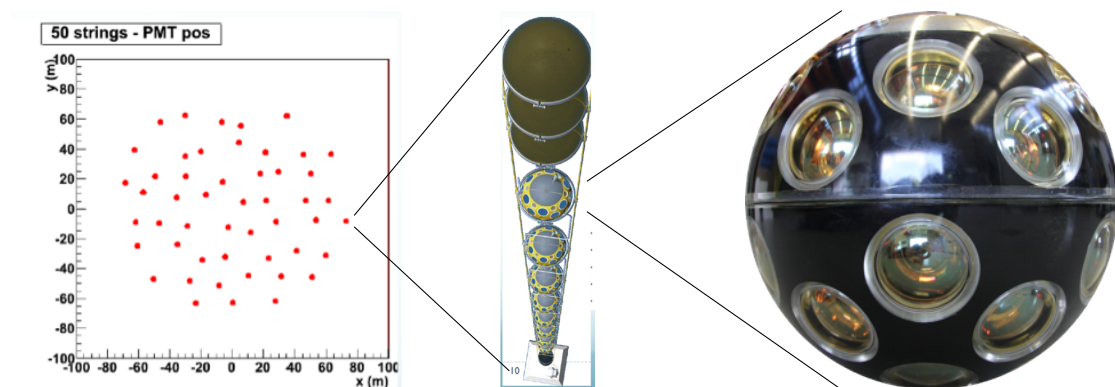


Abbildung 13: Footprint des ORCA Detektors (links), Strings (Mitte) [16] und DOM (rechts) [17]

2. Bestimmung der Elektroneneutrino-Ereignisraten

Im Folgenden wird der Einfluss der Elektroneneutrinos auf die erfolgreiche Bestimmung der Massenhierarchie mit dem ORCA-Detektor behandelt.

Grundlegend hierfür ist zunächst die Bestimmung der Elektroneneutrino-Ereignisraten, d.h. welche Anzahl an detektierbaren Elektronen erwartet wird.

Weiterhin stellt sich die Frage, ob die gemessenen Elektronen zur Bestimmung der Neutrinomassenhierarchie beitragen oder als Untergrund herausgefiltert werden sollten.

2.1. Fluss atmosphärischer Neutrinos

Atmosphärische Elektroneneutrinos entstehen durch Reaktionen der kosmischen Strahlung mit den Molekülen in der Atmosphäre (vgl. Kap. 1.1). Zur Berechnung der Neutrinoflüsse werden nach [18] die Neutrinoflusstabellen für solares Minimum über gemitteltem Azimutwinkel für das Untergrundlabor bei Modane (Frejus) von M. Honda verwendet [19]. Daraus werden Histogramme für den Antielektron- und Elektroneneutrinofluss auf Basis der Skripte von S. Hallmann [18] generiert. Aufgetragen ist in Abb. 14(a) die Neutrinoenergie über den Kosinus des Zenitwinkels. Die Farbskala (logarithmische Darstellung) gibt die Anzahl der Neutrinos multipliziert mit E^3 an, wodurch die Energieproportionalität der kosmischen Strahlung relativiert wird.

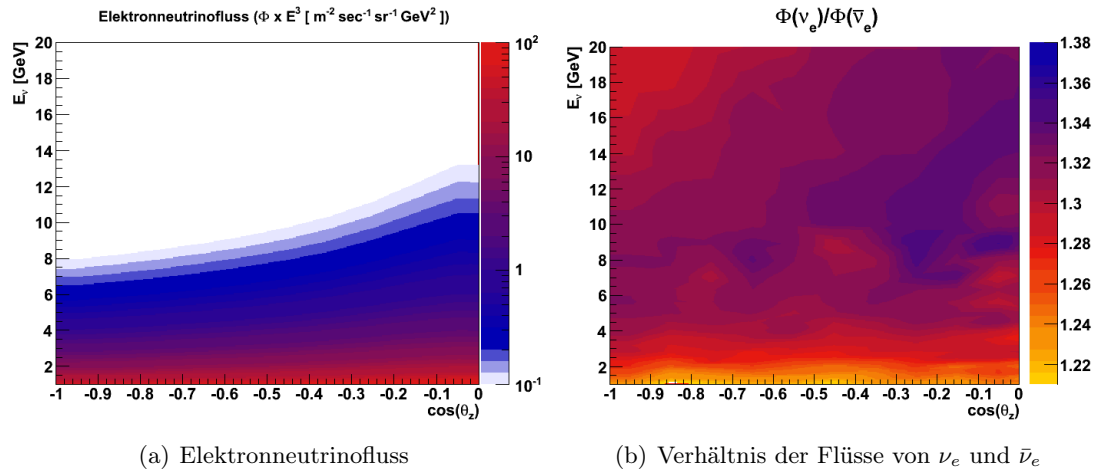


Abbildung 14: Fluss der Elektroneneutrinos und Verhältnis der Flüsse von ν_e und $\bar{\nu}_e$ generiert aus den berechneten Flüssen in [19].

Im Vergleich der Flüsse für die Elektroneneutrinos mit den Antielektroneneutrinos (Abb. 14(b)) ergibt sich ein Verhältnis von

$$\frac{\nu_e}{\bar{\nu}_e} \approx 1.3$$

Der Fluss der Antielektroneneutrinos beträgt also etwa 75 % des Flusses der Elektroneneutrinos. Das Verhältnis ist damit etwa dasselbe wie für die Myoneneutrinos (vgl. [18]).

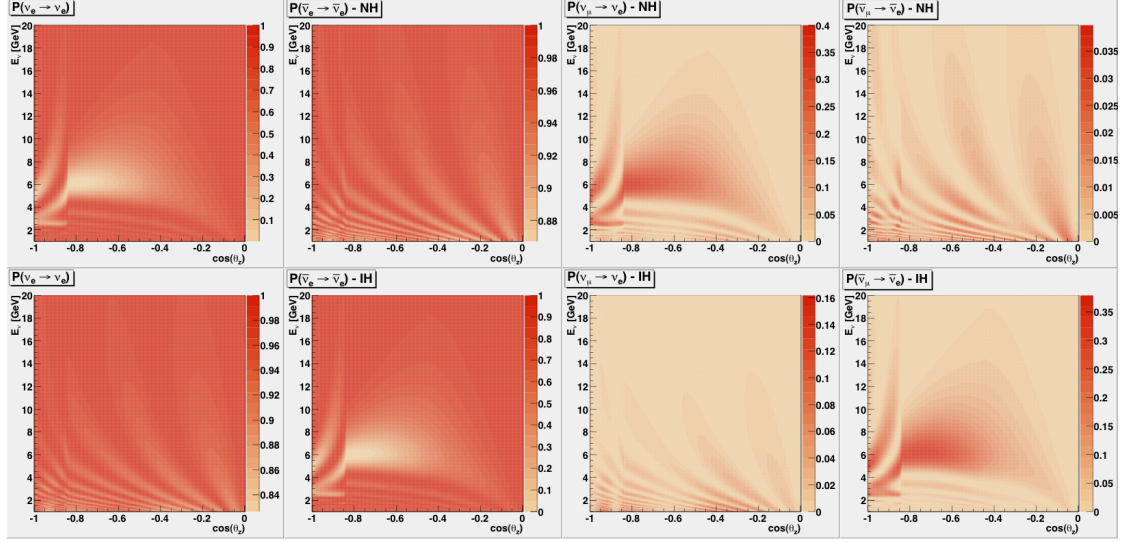


Abbildung 15: Oszillationswahrscheinlichkeiten für die Übergänge $\nu_e \leftrightarrow \nu_\mu$ und $\bar{\nu}_e \leftrightarrow \bar{\nu}_\mu$ für NH (oben) und IH

2.2. Oszillationswahrscheinlichkeiten

Nach der Entstehung propagieren die Neutrinos durch die Erde und werden durch Materieeffekte beeinflusst. Um von den Materieeffekten zu profitieren, werden mit ORCA die atmosphärischen Neutrinos der unteren Hemisphäre betrachtet, die die Erde durchqueren müssen. Dies hat zudem den Vorteil, dass atmosphärische Myonen, die aus derselben Richtung wie die zu untersuchenden Neutrinos kommen, abgeschirmt werden. Durch Neutrino-Oszillation ist es möglich, dass sich ein Elektronneutrino in eine andere Flavorart umwandelt oder eine andere Neutrinoart bei Ankunft im Detektorvolumen zu einem Elektronneutrino geworden ist. Daher werden die Oszillationswahrscheinlichkeiten für die diversen Übergangsmöglichkeiten bestimmt (Abb. 15, nach [18]²). Interessant für die Elektronneutrino-Ereignisraten sind die Übergänge $\nu_e \rightarrow \nu_e$ und $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ (analog für Antielektronneutrinos), jeweils für normale und invertierte Hierarchie. Die Oszillationswahrscheinlichkeit für die Umwandlung eines Elektronneutrinos in ein Tauneutrino wird in dieser Arbeit nicht betrachtet. Da nahezu keine atmosphärischen Tauneutrinos entstehen, kann die Umwandlung $\nu_\tau \rightarrow \nu_e$ vernachlässigt werden.

In den Oszillogrammen ist bei ca. $\cos \theta \approx -0.83$ eine deutliche Kante zu erkennen. Hierbei handelt es sich um den Beginn des Erdkernbereichs. Neutrinos, für die $\cos \theta \lesssim -0.83$ gilt, durchqueren den Erdkern. Der Übergang von Erdmantel zu Erdkern weist eine starke Dichteerhöhung auf (vgl. Kap. 1.3, Abb. 11), die sich wiederum auf die Oszillationswahrscheinlichkeiten auswirkt. Weiterhin auffällig ist, dass sich die Oszillogramme für $P(\nu_e \rightarrow \nu_e)$ für NH und $P(\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_e)$ für IH ähneln. Begründet ist dies in der Tatsache, dass der MSW-Effekt entweder für Neutrinos und NH oder Antineutrinos und IH auftritt.

²Oszillationstabellen wurden von Dominik Stransky, ECAP, erzeugt

Es findet daher für $\nu_e \rightarrow \nu_e$ und $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ ein Flavourflip für normale Hierarchie für Neutrinoenergien zwischen 4 - 8 GeV statt. Derselbe Effekt tritt für die Antineutrinos bei invertierter Hierarchie auf [20].

2.3. Detektion mit ORCA: Effektives Volumen für Elektronneutrinos

Der nächste Schritt in der Abschätzung der zu erwartenden Neutrinoraten ist die genauere Betrachtung des verwendeten Detektorsetups für ORCA und seiner Nachweiseffizienz für die verschiedenen Neutrino flavour bzw. der daraus resultierenden geladenen Leptonen. Ein wichtiger Aspekt ist hierbei auch das effektive Detektorvolumen. Das instrumentierte Volumen berechnet sich aus einfacher Zylindergeometrie mit einem Radius von 70 m und einer Höhe der Strings von 114 m zu 1.75 Mt. Allerdings gibt es Bedingungen, die das instrumentierte Volumen auf ein effektives Volumen verringern oder gegebenenfalls auch vergrößern können. Wie für die Myonen in [18] wird für die Elektronen die Forderung nach 10 detektierten Signalen (signal hits) gestellt. Aufgrund der geringen Reichweite eines Elektrons im Wasser (Strahlungslänge $\chi_0 = 36$ cm) wird keine geometrische Komponente zur Beachtung der "fully contained"-Bedingung wie für die Myonen einberechnet. Die sich nach J. Hofestädt [21] ergebenden Detektoreffizienzen für die Elektron- und Antielektronneutrinos sind in den Histogrammen in Abb. 16 dargestellt.

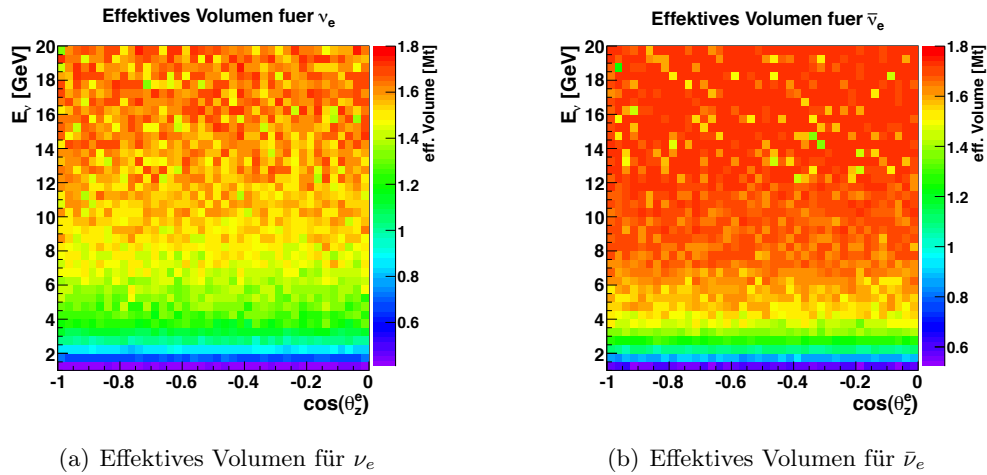


Abbildung 16: Effektives Volumen für ORCA für ν_e und $\bar{\nu}_e$ [21]

Für niedrige Neutrinoenergie beträgt das effektive Volumen weniger als die Hälfte des instrumentierten Volumens. Mit steigender Energie entspricht das effektive Volumen zunehmend dem instrumentierten Volumen. Das mittlere effektive Volumen für Elektronneutrinos beträgt 1.04 Mt und für Antielektronneutrinos 1.22 Mt. Das höhere effektive Volumen für $\bar{\nu}_e$ liegt an der Bjorken-Skalenvariable

$$y = \frac{E_\nu - E_l}{E_\nu}$$

wobei E_ν die Energie des einfallenden Neutrinos und E_l die Energie des entstehenden geladenen Leptons bezeichnet, und beschreibt den Energieübertrag des Neutrinos auf das geladene Lepton. Ein niedriger Wert bedeutet demnach, dass viel Energie vom Neutrino auf das geladene Lepton übertragen wird. Für eine Neutrinoenergie von 10 GeV beträgt die mittlere Bjorken-Skalenvariable $\langle y \rangle_\nu = 0.483$ für Neutrinos und $\langle y \rangle_{\bar{\nu}} = 0.333$ für Antineutrinos [22]. Aufgrund des geringeren Bjorken $\langle y \rangle$ für Elektronantineutrinos erhält das entstehende Positron mehr Energie als ein, durch ein ν_e gleicher Energie $E_\nu = E_{\bar{\nu}}$, entstandenes Elektron. In Abb. 16 zeigt sich dieser Effekt in einem höheren effektiven Volumen für Antielektronneutrinos.

2.4. Bestimmung der Ereignisraten und Asymmetrie für Elektronneutrinos

Die erwarteten Ereignisraten für die Elektronneutrinos werden anhand eines abgewandelten Skripts von S. Hallmann [18] erzeugt. Eingehende Histogramme sind die Neutrinoflüsse (Kap. 2.1), die Oszillationswahrscheinlichkeiten (Kap. 2.2) und die effektiven Volumina (Kap. 2.3). Weiterhin wird für die Elektronneutrinos derselbe (energieabhängige) Wirkungsquerschnitt wie für die Myonneutrinos angesetzt (Abb. 17), da bisher für Elektronneutrinos kaum Ergebnisse im hier relevanten Energiebereich von 1 - 20 GeV vorliegen. Die Annahme ist zudem gerechtfertigt aufgrund der geringen Neutrinomassen und (experimentell bestätigten) sogenannten Lepton-Universalität, nach der die Kopplung der verschiedenen Leptonen an die Eichbosonen der schwachen Wechselwirkung identisch ist [1].

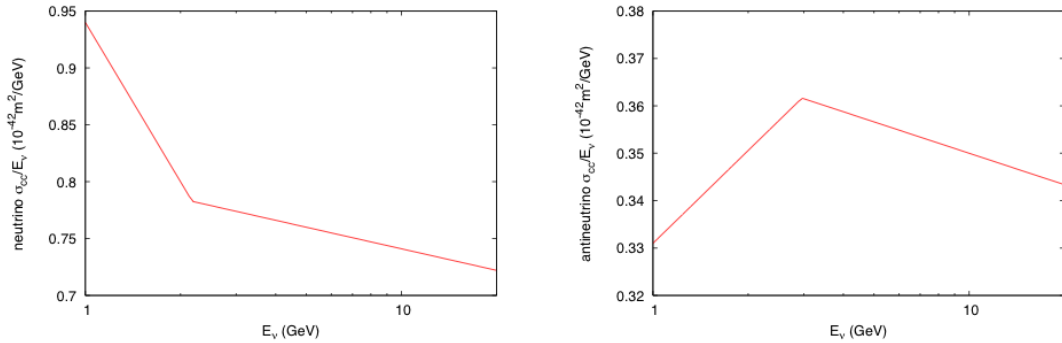


Abbildung 17: Parametrisierung des CC Wirkungsquerschnitt pro Nukleon für ν_μ (links) und $\bar{\nu}_\mu$ (rechts) [18]

Es ergeben sich die in Abb. 18 dargestellten Histogramme für normale und invertierte Massenhierarchie. Diese Ereignisraten sind gültig unter Annahme idealer Bedingungen³. Die in einem Jahr zu erwartende Anzahl an Elektronneutrinos ν_e und Antielektronneutrinos $\bar{\nu}_e$ für NH bzw. IH einmal für den Energiebereich 1 - 20 GeV und für 3 - 20 GeV ist in Tab. 1 zu finden.

³ d.h. Effizienz des Detektors sowie die Elektron-Identifikationsrate betragen 100% und die Richtungsrekonstruktion der Elektronen stimmt exakt mit der Richtung der einfallenden Neutrinos überein

	$\nu_e (\geq 1 \text{ GeV})$	$\bar{\nu}_e (\geq 1 \text{ GeV})$	$\nu_e (\geq 3 \text{ GeV})$	$\bar{\nu}_e (\geq 3 \text{ GeV})$
NH	7757	3342	3947	1580
IH	7640	3405	3834	1656

Tabelle 1: Erwartete Anzahl an ν_e und $\bar{\nu}_e$ für NH und IH nach einem Jahr Messung mit ORCA für $1 \leq E_\nu/\text{GeV} \leq 20$ und $3 \leq E_\nu/\text{GeV} \leq 20$

Die Anzahl an zu erwartenden Elektronneutrinos ist in etwa doppelt so groß wie die Anzahl an Antielektronneutrinos. Dies liegt zum einen daran, dass Protonen durch Reaktion mit den Molekülen der Atmosphäre mehr positive Mesonen produzieren und somit auch mehr Neutrinos als Antineutrinos (vgl. Kap. 1.1). Zum anderen ist der Wirkungsquerschnitt für die Neutrinos deutlich größer als für Antineutrinos. Diese dominierenden Effekte bewirken einen Überschuss an Elektronneutrinos, der für die Bestimmung der Neutrinomassenhierarchie von Bedeutung ist. Da der Detektor keine Unterscheidung zwischen Neutrinos und Antineutrinos vornehmen kann, würde eine gleiche Anzahl von ν_e und $\bar{\nu}_e$ eine Differenzierung von NH und IH unmöglich machen.

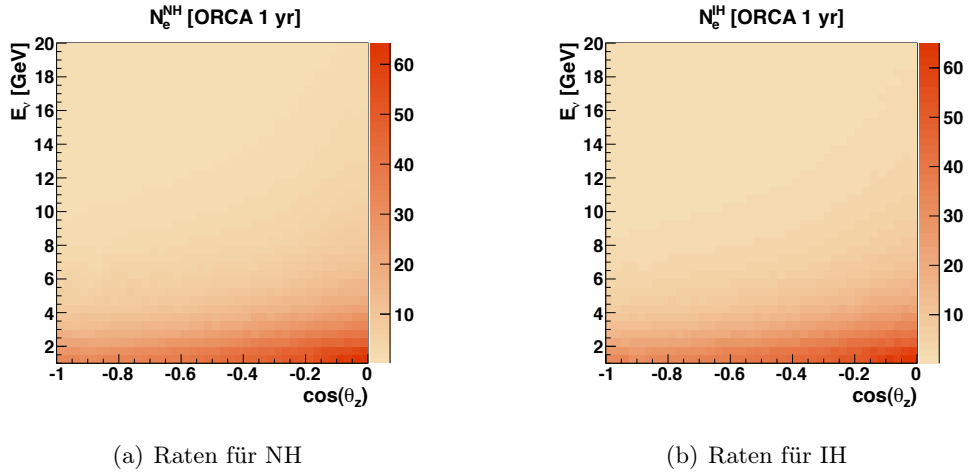


Abbildung 18: Ereignisraten für Elektronneutrinos für NH und IH

Interessant für die Bestimmung der Massenhierarchie ist die Betrachtung der Asymmetrie von NH und IH (Abb. 19), da die minimalen Unterschiede in den Raten mit bloßem Auge nicht zu erkennen sind.

Durch die gewählte Definition der Asymmetrie in jedem Bin i

$$\mathcal{A}_i^e = \frac{N_{e,i}^{\text{IH}} - N_{e,i}^{\text{NH}}}{\sqrt{N_{e,i}^{\text{NH}}}}$$

ist eine statistische Signifikanz für die Differenz zwischen den Ereignisraten der normalen und der invertierten Hierarchie gegeben [23]. Die Werte der Farbskala zeigen also die

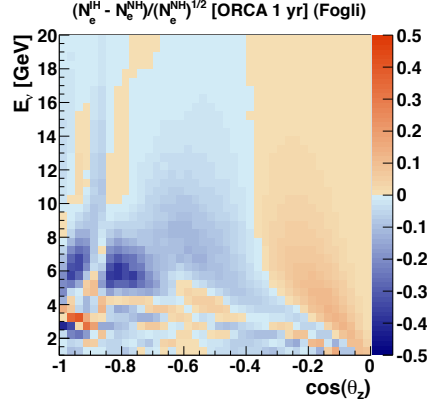


Abbildung 19: Asymmetrie $\mathcal{A}^e$ zwischen NH und IH für Elektronneutrinos ($\sigma_{\text{ges}} = 2.70$)

Signifikanz an, mit der nach einem Jahr Messung für eine bestimmte Neutrinoenergie und aus einer bestimmten Richtung eine Aussage für den Ausschluss einer der Hierarchien möglich ist. Unter Betrachtung aller Ereignisse wird eine Signifikanz von 2.70 erreicht.

2.5. Kinematische Verschmierung

Für die Richtungsrekonstruktion interessant ist lediglich der Zenitwinkel, unter dem das Neutrino einfällt. Dieser entscheidet, welche Strecke das Neutrino durch die Erde zurückgelegt hat und nimmt damit Einfluss auf die Oszillationswahrscheinlichkeiten.

Bei der Rekonstruktion des Zenitwinkels für das Neutrino spielt der Aspekt der kinematischen Verschmierung eine nicht vernachlässigbare Rolle. Diese rein physikalisch begründete Verschmierung ist unabhängig von der Detektorauflösung zu betrachten. Das Elektronneutrino erzeugt durch eine CC-Wechselwirkung ein Elektron, das sich allerdings nicht in exakt dieselbe Richtung weiterbewegt, aus der das Neutrino kam. Bei den betrachteten Energien liegt die mittlere Winkelabweichung, gemittelt über alle in den Neutrino-Nukleon-Reaktionen auftretenden Wechselwirkungskanälen und Inelastizitäten⁴, im Bereich einiger Grad.

An simulierte Daten bezüglich der Winkelverteilung der aus Myonneutrinos erzeugten Myonen werden nach [18] sowohl Gaußfunktionen als auch eine Landauverteilung angepasst. Es zeigt sich, dass die Landauverteilung die MC-Daten gut beschreibt (Abb. 20). Daher wird nach [18] eine landauverteilte Verschmierung im Zenitwinkel als kinematische Verschmierung auf die Ereignisraten für die Myonneutrinos angewendet.

Aufgrund des sehr großen γ -Faktors für Neutrinos sind die Unterschiede in der kinematischen Verschmierung für ν_e im Vergleich mit ν_μ gering, sodass für die Elektronneutrinos dieselbe Landauverteilung angenommen wird. Es verändern sich die Ereignisraten und die Asymmetrie wie in Abb. 21 dargestellt.

⁴definiert als der Anteil der Neutrinoenergie, der auf die in der Reaktion entstehende hadronische Kaskade am Vertex übergeht

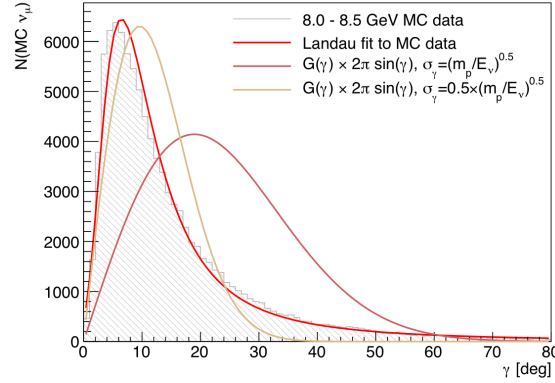


Abbildung 20: Winkelverteilung für ν_μ aus MC simulierten Daten mit angepasster Landauverteilung [18]

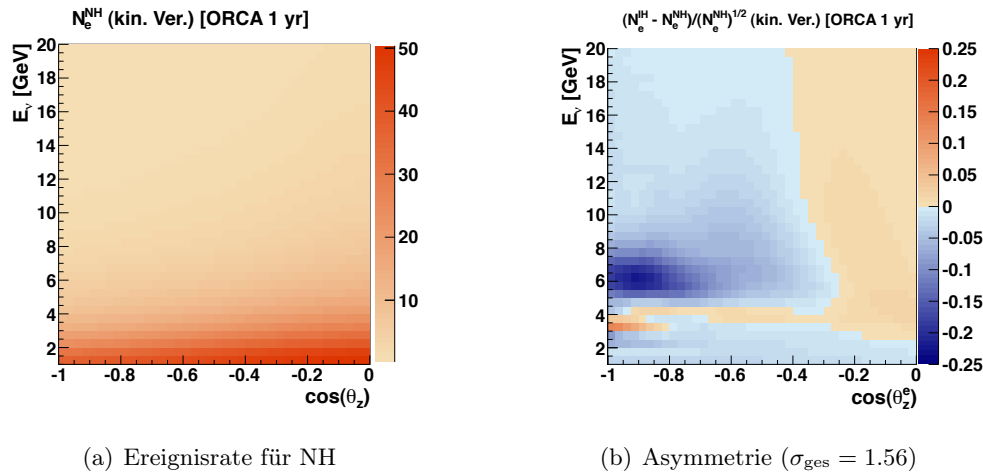


Abbildung 21: Ereignisrate für NH und Asymmetrie für ν_e mit kin. Verschmierung

Die Farbbereiche sind großflächiger, wobei die Unterschiede insgesamt geringer werden. Die gesamte Signifikanz beträgt nach einem Jahr Messzeit unter Beachtung der kinematischen Verschmierung noch 1.56.

2.6. Log-Likelihood-Quotient

Um im Folgenden die Vergleichbarkeit der Ergebnisse dieser Arbeit für die Elektronenneutrinos mit den Ergebnissen von S. Hallmann für die Myonneutrinos zu gewährleisten, wird derselbe statistische Test auf die Ereignisraten der Elektronenneutrinos angewendet (vgl. [18]).

Bei einer Messung ist die Anzahl an Ereignissen in einem Bin poissonverteilt um die erwartete Anzahl. Ziel ist es, eine Wahrscheinlichkeit anzugeben, mit der die gesamte

Verteilung der Ereignisse der einen oder anderen Massenhierarchie zugeordnet werden kann. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine in einem Bin i gemessene Anzahl k_i an Ereignissen mit der erwarteten Anzahl λ_i^{MH} (entweder für NH oder für IH) übereinstimmt, wird bestimmt durch

$$L_i^{MH}(k_i|\lambda_i^{MH}) = \frac{\exp(-\lambda_i^{MH}) (\lambda_i^{MH})^{k_i}}{(k_i)!}$$

Durch Multiplikation der Wahrscheinlichkeiten L_i^{MH} aller Bins, ergibt sich die gesamte Wahrscheinlichkeit, die Likelihood-Funktion, dafür, dass die angenommene Massenhierarchie die wahre Massenhierarchie ist:

$$L(k|MH) = \prod_i^n L_i^{MH}(k_i|\lambda_i^{MH})$$

wobei k für die Ereignisse einer Messung, n für die Anzahl an Bins und MH für die erwarteten Ereignisraten der betrachteten Massenhierarchie steht.

Um eine Aussage über die tatsächlich vorliegende Massenhierarchie treffen zu können, wird das Verhältnis dieser Wahrscheinlichkeiten definiert als

$$R(k) = \frac{L(k|NH)}{L(k|IH)}$$

Aus diesem Likelihood-Quotienten [24, 25] ist die favorisierte Hierarchie ablesbar. Für Berechnungen ist es sinnvoll, den Logarithmus des Likelihood-Quotienten zu betrachten, den Log-Likelihood-Quotienten (log-likelihood ratio):

$$\rho(k) = \log \left(\frac{L(k|NH)}{L(k|IH)} \right) = \sum_i (k_i \cdot \log \lambda_i^{NH} - k_i \cdot \log \lambda_i^{IH} - \lambda_i^{NH} + \lambda_i^{IH})$$

Mit dieser Definition von ρ ergeben sich negative Werte für den Log-Likelihood-Quotienten, wenn invertierte Hierarchie vorliegt und positive Werte, wenn normale Hierarchie die wahre Massenhierarchie ist.

Nach [18] wird folgende Vorgehensweise zur Bestimmung der Log-Likelihood-Quotienten mithilfe eines Pseudo-Experiments verwendet:

1. Eine Hierarchie (z.B. NH) wird als die wahre MH angenommen. Aus erwarteter Verteilung der Ereignisse wird eine "pseudo" gemessene Verteilung durch Poissonverteilung (zufällige Messwerte) erstellt. Diese wird auf die Messdauer (Anzahl Jahre) normiert.
2. Die Anzahl an Ereignissen der erwarteten Verteilung wird auf die Anzahl der "pseudo" gemessenen Verteilung normiert.
3. Der Log-Likelihood-Quotient wird bestimmt. Damit ergibt sich ein Wert $\rho^{NH} > 0$ für den Fall, dass NH die wahre Hierarchie ist.
4. N-male Wiederholung des Pseudo-Experiments für NH als wahre Massenhierarchie: Verteilung der Log-Likelihood-Quotienten ist positiv um mittleres ρ_0^{NH} .

5. Dasselbe Experiment für IH als wahre MH: Verteilung der Log-Likelihood-Quotienten ist negativ um mittleres ρ_0^{IH} .

Im Ergebnis werden die beiden entstehenden Verteilungen mit zunehmender Messdauer einen größeren Abstand $|\rho_0^{NH} - \rho_0^{IH}|$ zueinander haben (Abb. 22). Auffällig ist, dass nach zwei Jahren Messzeit die für die Messung der Elektronenneutrinos entstandenen Log-Likelihood-Quotienten noch nicht vollständig voneinander getrennt sind. Ein Ausschließen der einen oder anderen Hierarchie ist nach dieser Messzeit also kaum möglich.

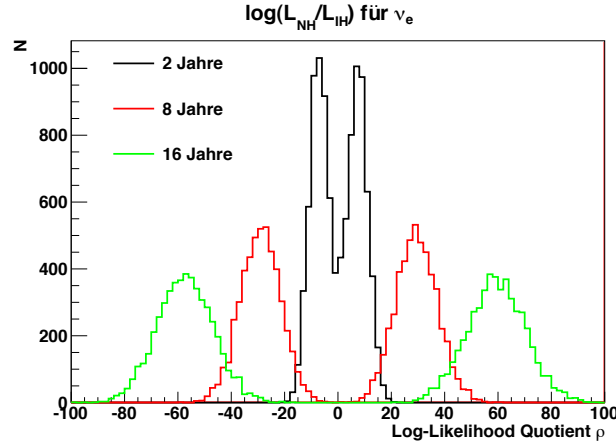


Abbildung 22: Log-Likelihood-Quotienten für 2, 8, 16 Jahre im Vergleich für ν_e -Ereignisraten unter idealen Bedingungen

2.7. P-Value

Um eine sichere Aussage treffen zu können, welche der beiden Massenhierarchien vorliegt, ist es notwendig, eine der Hierarchien mit mindestens 5σ Signifikanz auszuschließen. Hierzu wird der P-Value eingeführt. Dieser gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass eine der beiden Hierarchien mit der geforderten Signifikanz ausgeschlossen werden kann.

Dazu wird an die beiden Verteilungen der Log-Likelihood-Quotienten für angenommene normale bzw. invertierte Hierarchie eine Gaußfunktion angepasst. Der Ausschluss einer Hierarchie mit 5σ erfolgt dann, wenn der aus Messung bestimmte Wert für $\rho(k)$ außerhalb des erwarteten, mittleren $\rho_0^{MH} \pm 5\sigma$ der auszuschließenden Hierarchie liegt (Abb. 23).

Die sich ergebenden P-Values aus den in Kap. 2.6 bestimmten Verteilungen der Log-Likelihood-Quotienten für eine 5σ -Aussage sind in Abb. 24 einmal ohne (schwarz) und einmal mit kinematischer Verschmierung (rot) dargestellt.

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 50% wird eine 5σ -Aussage nach etwa $3\frac{1}{2}$ Jahren (ohne kin. Verschmierung) bzw. nach ca. 11 Jahren (mit kin. Verschmierung) getroffen werden können. Es ist also eine lange Messzeit erforderlich, um eine Massenhierarchie durch Messung von Elektronenneutrinos sicher auszuschließen.

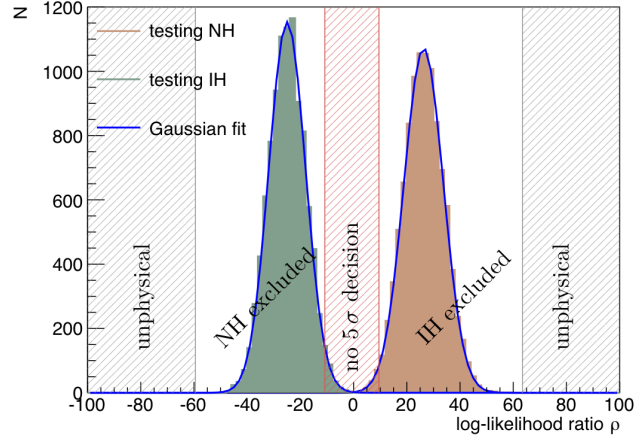


Abbildung 23: Prinzip des Ausschlusses einer Massenhierarchie mit 5σ [18]

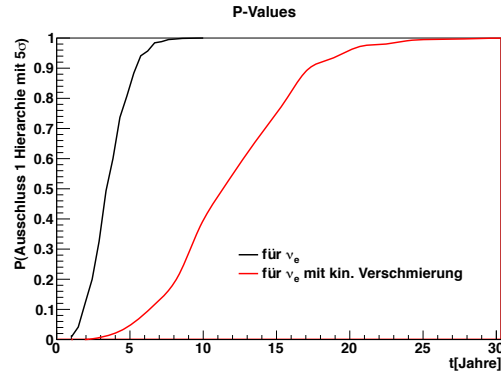


Abbildung 24: P-Values für Elektronneutrinos

3. Vergleich der Ergebnisse für Elektron- und Myonneutrinos

Für einen Vergleich der Ergebnisse aus Kap. 2 für die Messung von Elektronneutrinos mit denen für die Myonneutrinos (aus [18]) sind in Abb. 25 die Ereignisraten für beide Neutrino flavours ohne Verschmierungen abgebildet.

Während die Oszillationen der Neutrinos in den Raten für die Myonneutrinos dominieren, ähneln die Raten für die Elektronneutrinos eher den Histogrammen für den Elektronneutrino flux. Dadurch ergeben sich weniger deutliche Abgrenzungen zwischen hohen und niedrigen Ereignisraten einzelner Energie- und Winkelbereiche. Diese fließenden Übergänge bei den Raten für die Elektronneutrinos führen weiterhin zu einer erschwerten Unterscheidung der beiden Massenhierarchien.

Dies lässt sich besser einschätzen, indem die Asymmetrien für Myonneutrinos und Elektronneutrinos miteinander verglichen werden. Bei gleich gewähltem Werteintervall der Farbskala wird ersichtlich, dass die Unterschiede zwischen normaler Hierarchie und invertierter Hierarchie für die Myonneutrinos deutlicher sind (Abb. 26).

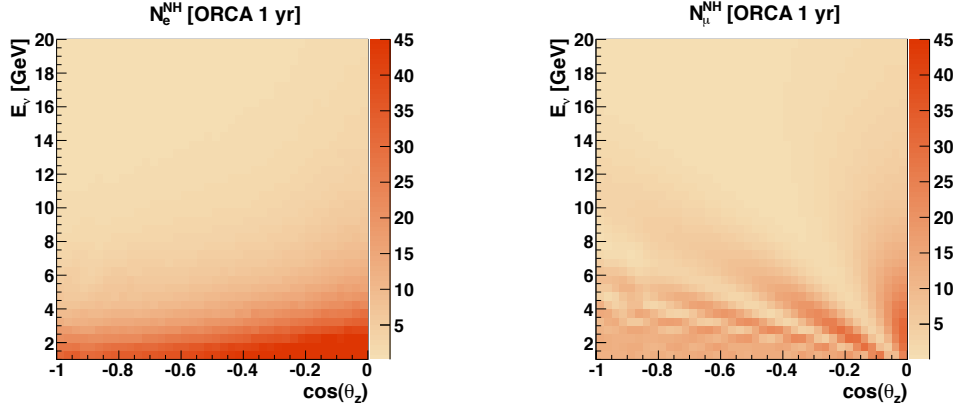


Abbildung 25: Vergleich der Ereignisraten für ν_e und ν_μ für NH

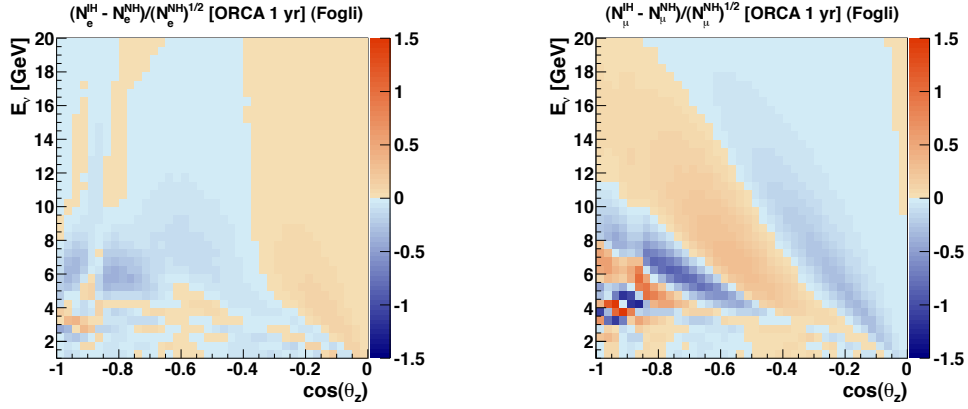


Abbildung 26: Asymmetrie für ν_e ($\sigma_{\text{ges}} = 1.70$) im Vergleich mit ν_μ ($\sigma_{\text{ges}} = 7.77$)

Im weiteren Vergleich der Verteilungen der Log-Likelihood-Quotienten (Abb. 27(a)) und der Ergebnisse für die P-Values (Abb. 27(b)) wird klar, dass die Elektroneneutrinos keinen signifikanten Beitrag zur Bestimmung der Massenhierarchie leisten können. Für optimale Bedingungen, d.h. Effizienz des Detektors sowie die Myon-Identifikationsrate betragen 100% und die Richtungsrekonstruktion der Myonen bzw. Elektronen stimmt exakt mit der Richtung der einfallenden Neutrinos überein, lässt sich für die Messung der Myonen bereits nach zwei Jahren eine sichere Aussage über die Massenhierarchie treffen, während für die Elektroneneutrinos noch kaum eine Trennung der beiden Verteilungen der Log-Likelihood-Quotienten möglich ist.

Das Verhältnis der Abstände der mittleren Log-Likelihood-Quotienten einmal für NH als wahre Hierarchie ($\rho_{\text{mean}}^{NH} \equiv \rho^{NH} > 0$) und einmal für IH als wahre Hierarchie ($\rho^{IH} < 0$)

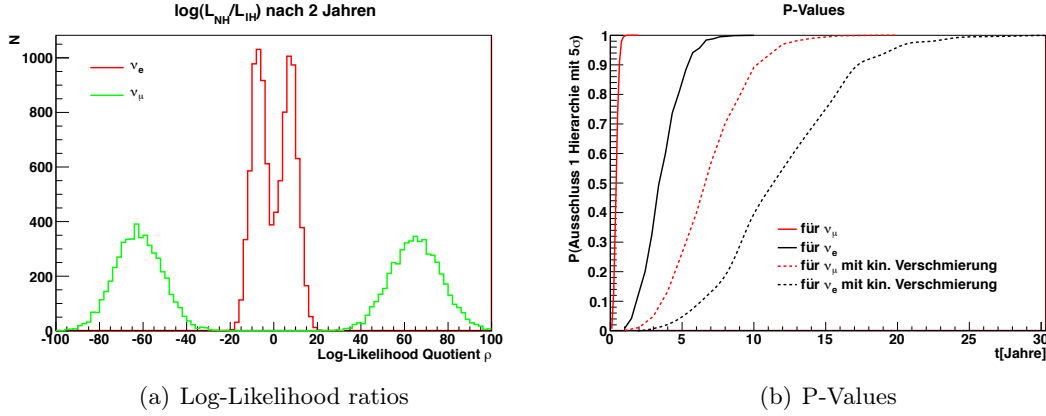


Abbildung 27: Log-likelihood ratios and P-Values for ν_e in comparison with ν_μ

zwischen ν_e - und ν_μ -Messung beträgt

$$\frac{\rho_e^{NH} - \rho_e^{IH}}{\rho_\mu^{NH} - \rho_\mu^{IH}} \approx 0.11$$

Das Verhältnis der P-Values entspricht in etwa diesem Verhältnis. Durch Messung der Myonneutrinos (unter Annahme idealer Bedingungen) lässt sich nach weniger als zwei Jahren bereits eine Hierarchie mit einer 5σ -Aussage mit einer Wahrscheinlichkeit von $>99\%$ ausschließen. Bei Messung der Elektroneneutrinos ergibt sich lediglich ein P-Value von 11%, eine sichere Aussage nach zwei Jahren Messzeit ist damit kaum wahrscheinlich. Ein P-Value $>99\%$ wird für die Elektroneneutrinos erst nach einer Messdauer von etwa 7.5 Jahren erreicht.

Aufgrund dessen wird im Weiteren untersucht, inwiefern die Elektroneneutrinos zum nicht erwünschten Untergrund bei der Messung der Ereignisraten für die Myonneutrinos beitragen und welche Auswirkungen dies auf eine erfolgreiche Bestimmung der Massenhierarchie hat.

4. Einfluss der Missidentifikationsrate auf die Messung von Myonneutrinos

Ein wesentlicher Faktor in der Bestimmung der erwarteten Myonneutrino-Ereignisrate ist die Detektoreffizienz bezüglich der Identifikation des durch das Neutrino erzeugten Myons als Myon. Dazu werden zum einen die Myonen, die fälschlicherweise als Elektronen detektiert werden, und zum anderen die Elektronen, die als Myonen erkannt werden, betrachtet. Diese eingehende Detektoreffizienz wirkt sich auf die erwarteten ν_μ -Ereignisraten aus und verschlechtert die Asymmetrie zwischen invertierter und normaler Massenhierarchie.

4.1. Unterschiede in der Detektion von Elektron und Myon

Die Identifikation des durch den Detektor laufenden Teilchens erfolgt über die Spur, die durch das emittierte Cherenkovlicht rekonstruiert wird. Während Myonen, als minimal ionisierende Teilchen (MIP), eine große Reichweite im Wasser haben (ca. 4.25 m/GeV), beträgt die Strahlungslänge χ_0 für Elektronen im Wasser 36 cm. Nach dieser vergleichsweise kurzen Strecke wird das Elektron im Mittel eine elektromagnetische Kaskade auslösen. Durch Bremsstrahlung entstehen Photonen, die daraufhin Elektron-Positron-Paare erzeugen, die ihrerseits wieder Photonen abstrahlen. Jedes entstandene, geladene Teilchen (e^+ bzw. e^-), das sich mit einer Energie, die über der Cherenkovschwelle E_{thr} liegt, durch das Wasser bewegt, emittiert zudem Cherenkovphotonen. Die gesamte Länge einer solchen elektromagnetischen Kaskade entspricht ungefähr der Spurlänge eines Myons mit niedriger Energie (wenige GeV).

Zur groben Einschätzung der Länge einer solchen Kaskade wird das simple Modell von W. Heitler [26] zur Berechnung verwendet: Jedes $e^\pm$ mit $E > E_c = 70$ MeV (E_c : kritische Energie) gibt nach Durchlaufen einer Strahlungslänge ein Bremsstrahlungsphoton ab. Jedes Photon mit $E > E_c$ zerfällt nach einer Strahlungslänge in ein e^+e^- -Paar, wobei sich die Energie des Photons gleichmäßig aufteilt. Unter dieser stark vereinfachten Annahme werden nach t Strahlungslängen $N(t) = 2^t$ Teilchen erzeugt, die eine mittlere Energie von $E(t) = E_0/N(t) = E_0 \cdot 2^{-t}$ besitzen. Die Anzahl an Strahlungslängen, nach denen das Schauermaximum erreicht wird, ergibt sich aus der Bedingung $E(t) = E_c$.

$$t_{peak} = \frac{\ln(E_0/E_c)}{\ln 2}$$

Sobald ein Teilchen eine Energie $E \leq E_c$ besitzt, werden die Energieverluste nicht mehr durch Bremsstrahlung dominiert, sondern erfolgen durch Ionisation und Anregung. Die gesamte Spurlänge der Kaskade ergibt sich aus

$$t_{total} = \int_0^{t_{peak}} 2^t dt = \frac{2^{t_{peak}} - 1}{\ln 2}$$

Interessant ist allerdings nicht die gesamte Länge der Kaskade, sondern die Länge der Kaskade bis die Teilchen der Kaskade keine Cherenkovphotonen mehr aussenden, also $E \leq E_{thr}$ (E_{thr} : Schwellenergie für Cherenkovstrahlung) gilt. Diese Schwellenergie E_{thr} ergibt sich aus

$$E_{thr} = E_0 \cdot \gamma = E_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = m_0 \cdot c^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - (1/n)^2}} \approx 0.77 \text{ MeV}$$

wobei $n = 1.33$ der Brechungsindex in Wasser ist. Auf diese Weise werden mittlere Spurlängen erreicht, wie sie in Tab. 2 notiert sind.

Kann der Detektor die Spur eines einzelnen Teilchens nicht von der Spur einer Kaskade unterscheiden, so können Elektronen fälschlicherweise als Myonen detektiert werden.

E_0 [GeV]	Spurlänge [m]	t_{peak}	t_{thr}	t_{total}
1	3.73	3.84	10.34	19.17
5	4.57	6.16	12.66	101.61
10	4.93	7.16	13.66	204.66
15	5.14	7.74	14.25	307.71
20	5.29	8.16	14.66	410.76

Tabelle 2: Spurlänge einer elektromagnetischen Kaskade in [m] und Anzahl Strahlungslängen bis zum Schauermaximum (t_{peak}), bis $E < E_{thr}$ (t_{thr}) und gesamte Spurlänge (t_{total}) in Abhängigkeit der Anfangsenergie E_0 des $e^\pm$

In Abb. 28 sind nach T. Heid [27] die Klassifikationsraten für die Klasse der spurartigen Ereignisse (= Myonen) und die Klasse der schauerartigen Ereignisse, die die Ereignisse durch Elektronen sowie Schauer durch NC-Wechselwirkungen der $\nu_{e,\mu}$ mit Materie beinhalten, dargestellt. Definiert ist die Klassifikationsrate als

$$CL = \frac{\text{korrekt klassifiziert}}{\text{alle Ereignisse einer Klasse}}$$

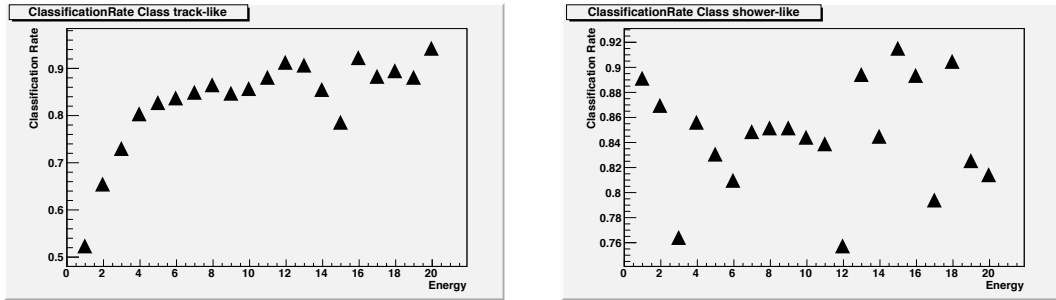


Abbildung 28: Klassifikationsraten für spurartige (links) und schauerartige Ereignisse [27]

Daraus werden die Missidentifikationsraten zu $(1 - CL)$ bestimmt und an die Missidentifikationsrate für die spurartigen Ereignisse eine Exponentialfunktion angepasst. Für die schauerartigen Ereignisse scheint es keine Energieabhängigkeit zu geben, weshalb ein Mittelwert für die Missidentifikationsrate berechnet wird (Abb. 29). Bei den Abweichungen in der Klassifikationsrate der schauerartigen Ereignisse handelt es sich um statistische Fluktuationen.

Für die weiteren Berechnungen wird damit eine Wahrscheinlichkeit

$$P_\mu = P(E_\mu) = 0.55 \cdot \exp(-0.44 \cdot E_\mu) + 0.12$$

dafür angesetzt, dass ein Myon als Elektron detektiert wird. Je höher die Energie, desto sicherer kann der Detektor ein Myon als Myon identifizieren. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Elektron als Myon erkannt wird ergibt sich zu $P_e = P(E_e) = 0.155$.

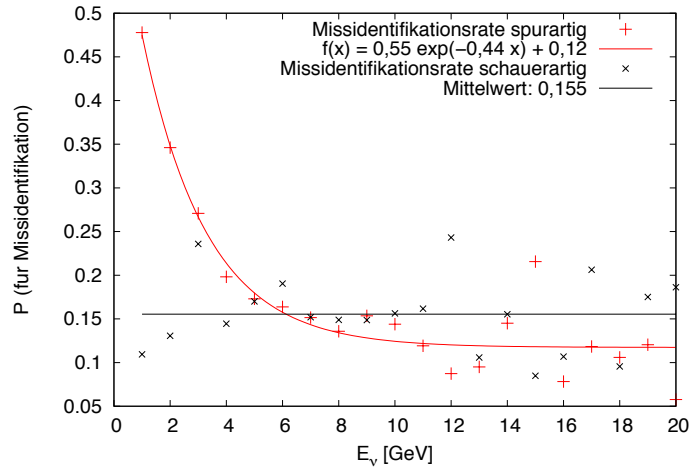


Abbildung 29: Missidentifikationsraten für spur- und schauerartige Ereignisse

4.2. Einfluss der Teilchenidentifikation auf Myonneutrino-Ereignisrate

Mit den verwendeten Wahrscheinlichkeiten P_e und P_μ für die Missidentifikation lassen sich nun aus den Histogrammen für die erwarteten Elektron- und Myonneutrino-Ereignisraten mit kinematischer Verschmierung die Anzahl der falsch identifizierten Elektronen/ Myonen bestimmen.

Nach S. Galatà [28] ist die rekonstruierte Myonenergie der missidentifizierten Elektronen nahezu unabhängig von der eigentlichen Energie des Elektrons (Abb. 30).

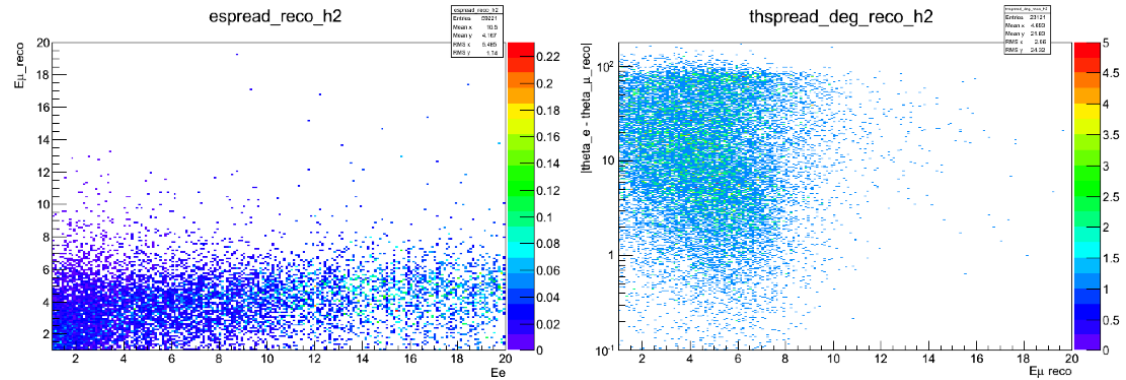


Abbildung 30: Rekonstruktion von Elektronen als Myonen [28]

Auch für die Richtungsrekonstruktion erhält man eine deutliche Abweichung von der wahren Spur des "falschen" Myons. Deshalb wird eine gaußförmige Verschmierung sowohl

in der Richtung (Breite⁵ Gaußverteilung $\sigma_\theta = 25^\circ$) als auch in der Energie für jeden Bin gewählt, wobei die rekonstruierte Myonenergie zufällig im Energiebereich von 1 bis 10 GeV liegt (Breite Gaußverteilung $\sigma_E = 3.0$ GeV, Mittelwert $\mu_E = 2.5 + 0.1 \cdot E_\nu$). Aus den Ereignisraten für die Elektroneneutrinos entsteht auf diese Weise eine Verteilung derjenigen Elektronen, die für Myonen gehalten werden, wie es in Abb. 31 dargestellt ist (für NH und für IH). Im linken Histogramm ist die Verschmierung bei der Rekonstruktion für ein Elektron der Energie $E = 20$ GeV, das unter $\cos \theta \approx -0.4$ einfällt, abgebildet.

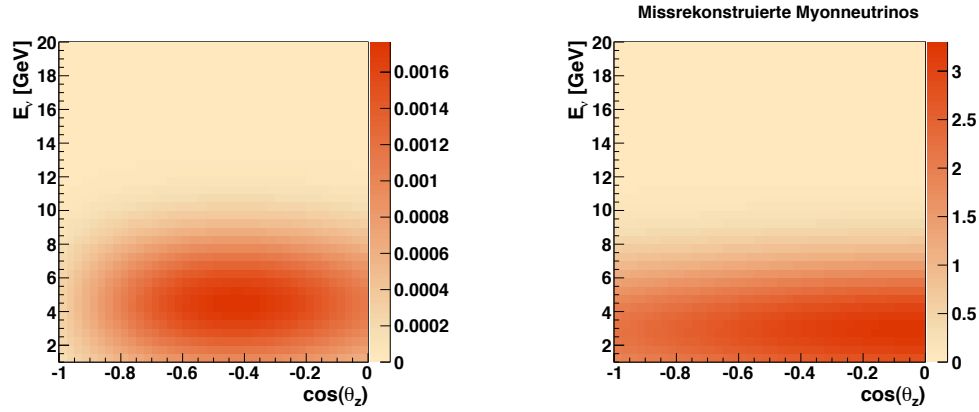


Abbildung 31: Verschmierung in einem Bin (links) und gesamte Verteilung missrekonstruierter Myonen

Aus den Ereignisraten (NH und IH) mit kinematischer Verschmierung für die Myonneutrinos wird auf jeden Bin die energieabhängige Wahrscheinlichkeit P_μ , dass ein Myon für ein Elektron gehalten wird, angewendet. Die entsprechenden Myonen werden daraufhin aus dem Histogramm entfernt.

Insgesamt ergibt sich mit den fehlenden "richtigen" Myonen und den zusätzlichen "falschen" Myonen, die in Abb. 32 dargestellte Erwartung für die Asymmetrie unter Beachtung einer Detektoreffizienz bezüglich der Teilchenidentifikation im Vergleich mit der Myonneutrino-Ereignisrate mit kinematischer Verschmierung sowie die Differenz der Absolutbeträge in jedem Bin i der Asymmetrien: $|\mathcal{A}_i^{kin.}| - |\mathcal{A}_i^{mis.}|$.

Die Unterschiede zwischen den beiden Asymmetrien sind gering. Zu erkennen ist eine Veränderung insbesondere im unteren Bereich des Histogramms, d.h. für Myonneutrinoenergien $E_\nu \lesssim 5$ GeV. Des Weiteren werden mehr "gute" Myonen fälschlicherweise als Elektronen detektiert (1885 für NH) als Elektronen für Myonen gehalten werden (1285 für NH). Somit werden insgesamt Myonneutrinos entfernt, was eine geringere Statistik zur Folge hat. Bei Wahl des gleichen Wertebereichs der Farbskala wird dieser Effekt durch die blassere Einfärbung deutlich. Die Unterschiede zwischen NH und IH sind geringer. Dies wird durch die Darstellung der Differenz der Beträge der Werte in jedem Bin deutlich. In den Bereichen mit höherer statistischer Signifikanz werden so in einem Bin Differenzen

⁵Der Einfluss der gewählten Breite der Winkelverteilung ist hierbei gering, s. Anhang A

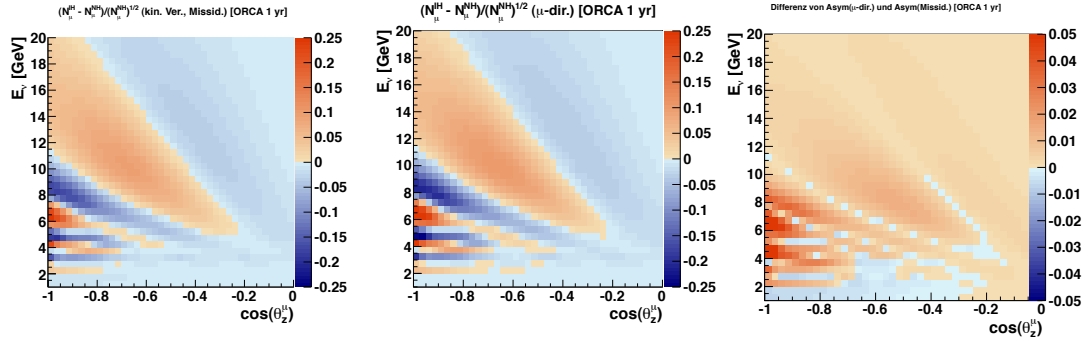


Abbildung 32: Asymmetrie für ν_μ mit Missidentifikation (links, $\sigma_{ges} = 1.68$), mit kin. Verschmierung (Mitte, $\sigma_{ges} = 1.96$) und Differenz der Beträge in jedem Bin

bis zu 0.05σ erreicht. Dies bedeutet insgesamt eine Verschlechterung der Signifikanz von $\sigma_{ges} = 1.96$ ohne Berücksichtigung des Elektroneneutrino-Untergrundes auf $\sigma_{ges} = 1.68$ unter Beachtung einer Teilchenidentifikationseffizienz.

Betrachtung von "worst-case"-Szenarien

Einige der oben gemachten Annahmen sind rein qualitativ getroffen, sodass es durchaus interessant ist, sich anzusehen, welche Ergebnisse man unter den schlechtesten, anzunehmenden Bedingungen erhält. Dazu werden zwei Szenarien betrachtet:

- (1) $P_e = 0.5 = P_\mu$. Es wird damit rein zufällig entschieden, um welches Teilchen es sich handelt. Es besteht eine 50:50 - Chance ein Elektron für ein Myon bzw. ein Myon für ein Elektron zu halten.
- (2) Alle Elektroneneutrinos werden als Myonen detektiert ($e^- = \mu_{reco}$). Vorteil hierbei ist, dass keine Myonen fälschlicherweise weggeworfen werden.

Die Rekonstruktion der Myonenergie der Elektronen, die als Myonen detektiert werden, sowie auch die Richtungsrekonstruktion erfolgt wie in Kap. 4.2 beschrieben. Die sich ergebenden Asymmetrien sind in Abb. 33 erneut im Vergleich mit der Asymmetrie mit kinematischer Verschmierung zu sehen.

Erwartungsgemäß wird die Asymmetrie weniger aussagekräftig, die Messungen müssen also über einen längeren Zeitraum laufen. Interessant ist, dass die Ausprägung der Unterschiede zwischen NH und IH stärker für den Fall (2) ausfällt. Es ist also besser, wenn alle Elektronen als Myonen rekonstruiert werden, als gute Myonen zu entfernen.

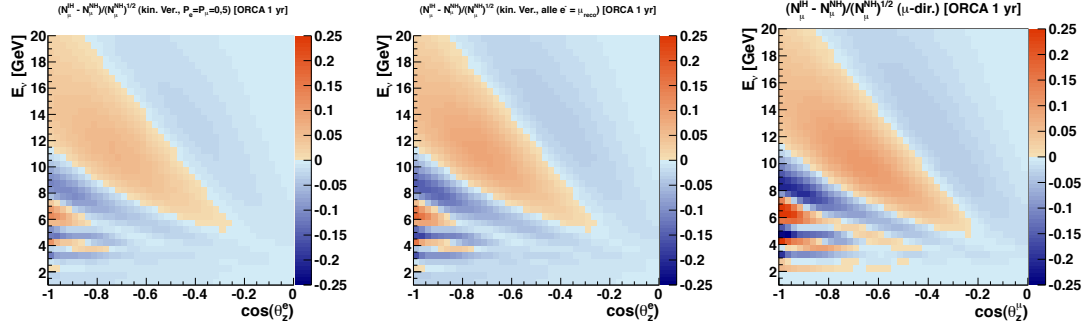


Abbildung 33: Asymmetrie für $P_e = 0.5 = P_\mu$ ($\sigma_{ges} = 1.10$), alle $e^- = \mu_{reco}$ ($\sigma_{ges} = 1.55$) und mit kin. Verschmierung ($\sigma_{ges} = 1.96$)

4.3. P-Value-Entwicklung für Myonneutrino-Ereignisse

Für eine fundierte Aussage über die zu erwartende Dauer des Experiments bis zu einem signifikanten Ergebnis wird der P-Value für den Ausschluss einer Hierarchie mit einer Signifikanz von 5σ berechnet (vgl. Kap. 2.7).

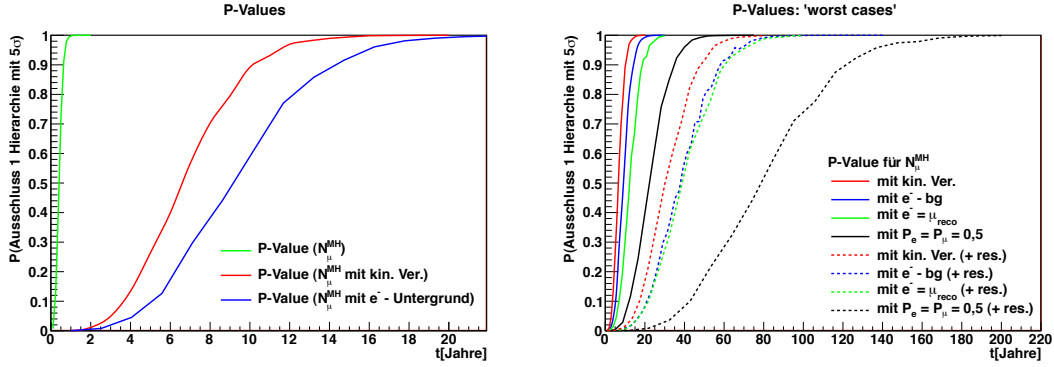
Es werden im Weiteren folgende Fälle der ν_μ - Ereignisraten betrachtet:

- (1) ideale Bedingungen
- (2) mit kinematischer Verschmierung
- (3) mit kin. Verschmierung + e^- -Untergrund
- (4) mit kin. Verschmierung + worst case " $P_e = 0.5 = P_\mu$ "
- (5) mit kin. Verschmierung + worst case " $e^- = \mu_{reco}$ "

Die Entwicklung des P-Values mit der Zeit wird in Abb. 34(a) für die Fälle (1), (2) und (3) aufgetragen und verglichen. Weiterhin werden die Fälle (2) - (5) betrachtet unter der Beachtung einer Detektoreffizienz bezüglich Energie- und Winkelauflösung. Es werden weitere gaußförmige Verschmierungen in Energie und Winkel nach [18] vorgenommen mit einer Breite $\sigma_E = 0.1 E_\nu + 1$ GeV in der Energieauflösung und $\sigma_\theta = 5^\circ$ in der Winkelauflösung bei Rekonstruktion der Myonrichtung (Abb. 34(b)).

Unter Beachtung einer Detektoreffizienz bezüglich der Teilchenidentifikation verlängert sich erwartungsgemäß die Zeit bis eine sichere Aussage über die Neutrinomassenhierarchie getroffen werden kann (Tab. 3).

Auffällig ist, dass die Unterschiede zwischen Fall (3) und einem "worst-case"-Szenario, Fall (5), nicht sonderlich groß sind. Bei Annahme einer besonders schlechten Trennung zwischen Elektron und Myon, verschlechtert sich das Ergebnis für den P-Value dagegen drastisch. Wie schon bei den Asymmetrien der "worst-case"-Szenarien zu erahnen war, bestätigt der Verlauf des P-Values, dass es bei sehr schlechter Klassifikationsrate besser ist, alle Elektronen als Myonen zu rekonstruieren und keine Ereignisse zu entfernen.



(a) P-Values für (1), (2), (3)

(b) P-Values für (3), (4), (5) + Detektorauflösung

Abbildung 34: P-Values für verschiedene Fälle

Fall	Laufzeit für P-Value $> 95\%$ für 5σ [Jahre]
mit kin. Verschmierung (2)	12
mit e^- -Untergrund (3)	16
$P_e = 0.5 = P_{\mu}$ (4)	40
$e^- = \mu_{reco}$ (5)	22
(2) + Detektorauflösung	55
(3) + Detektorauflösung	65
(4) + Detektorauflösung	137
(5) + Detektorauflösung	69

Tabelle 3: Vergleich der Laufzeiten, um mit einem P-Value $> 95\%$ eine Hierarchie mit 5σ -Signifikanz auszuschließen

Wie in [18] bereits festgestellt wurde, hat die Energie- und Winkelauflösung des Detektors einen großen Einfluss auf die erfolgreiche Bestimmung der Massenhierarchie. Die zeitlichen Abstände für eine 5σ -Aussage mit einem P-Value $> 95\%$ nehmen bei Betrachtung der Detektoreffizienz deutlich zu.

4.4. Erforderliche Messzeit für ORCA

Weiterhin wird betrachtet in welchem Zeitraum eine 1 – 5σ Aussage für die verschiedenen Szenarien getroffen werden kann. Dazu wird die Signifikanz σ über [Megatonnen·Jahre] (erforderliche Messzeit bzw. Exposure) aufgetragen. Der Signifikanz-Wert wird erreicht, sobald der dazugehörige P-Value die 50%-Marke überschreitet, d.h. eine x - σ Aussage mit einer Wahrscheinlichkeit von 50% getroffen werden kann. Das mittlere effektive Volumen von ORCA für Myonneutrinos beträgt hierbei ca. 0.7 Mt. Die Ergebnisse für die verschiedenen Fälle aus Kap. 4.3 sind in Abb. 35 zu sehen.

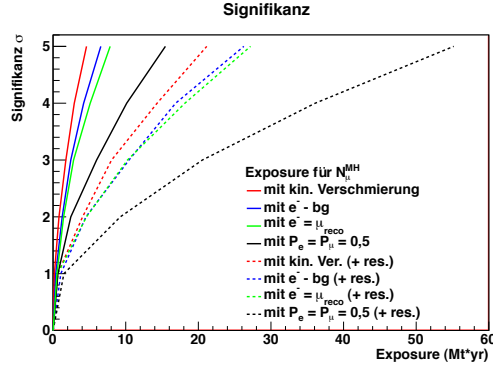


Abbildung 35: Erforderliche Messzeit für die Fälle (2) - (5)

Erneut zeigt sich, dass der Unterschied zwischen Fall (3) mit realistischen Annahmen in Bezug auf die Missidentifikation und Fall (5) mit der Annahme, dass alle Elektronen als Myonen detektiert werden, gering ist. Die erforderliche Messzeit für eine 5σ -Aussage beträgt für den realistischen Fall (mit Detektorauflösung) etwa 26.26 Mt·yr, während für den Fall (5) eine Laufzeit von etwa 27.19 Mt·yr zu kalkulieren ist. Positiv zu betrachten ist, dass nach ca. 10.45 Mt·yr – unter den in Fall (3) angenommenen Bedingungen – bereits eine 3σ -Aussage getroffen werden kann. In Tab. 35 sind die erforderlichen Messzeiten für die untersuchten Fälle für eine 3σ - und eine 5σ -Aussage dargestellt.

Fall	Exposure für 3σ [Mt·yr]	Exposure für 5σ [Mt·yr]
mit kin. Verschmierung (2)	1.76	4.60
mit e^- -Untergrund (3)	2.43	6.57
$P_e = 0.5 = P_\mu$ (4)	5.99	15.46
$e^- = \mu_{reco}$ (5)	2.81	7.86
(2) + Detektorauflösung	8.05	21.16
(3) + Detektorauflösung	10.45	26.26
(4) + Detektorauflösung	20.55	55.17
(5) + Detektorauflösung	10.24	27.19

Tabelle 4: Vergleich der erforderlichen Messzeit (Exposure), um mit einem P-Value $> 50\%$ eine Neutrinomassenhierarchie mit 3σ - und mit 5σ -Signifikanz auszuschließen

Für ORCA (eff. Volumen = 0.7 Mt für Myonneutrinos) bedeutet dies, dass unter den jetzigen Planungen für das Detektorsetup eine Messzeit von mindestens 15 Jahren erforderlich sein wird, wobei in dieser Arbeit viele Unsicherheiten bezüglich eingehender Parameter (Neutrinoflüsse, Oszillationen, Neutrinoparameter, ...) nicht betrachtet wurden.

5. Zusammenfassung und Ausblick

Bei der Berechnung der Elektroneneutrino-Ereignisraten sowie der statistischen Asymmetriebetrachtung zwischen normaler und invertierter Neutrinomassenhierarchie für ORCA zeigte sich in dieser Arbeit, dass die Bestimmung der Massenhierarchie durch Messung von Elektroneneutrinos eine deutlich längere Messzeit erfordern würde als durch Messung von Myoneneutrinos. Der Vergleich der zu erwartenden Messdauer für ORCA unter idealen Bedingungen ergab etwa zwei Jahre bei Messung von Myoneneutrinos und 7.5 Jahre für Elektroneneutrinos, um eine 5σ -Aussage mit einer Wahrscheinlichkeit $>90\%$ für den Ausschluss einer Hierarchie zu erhalten.

Weiterhin wurde der Einfluss der Elektroneneutrinos als Untergrund bei der Messung von Myoneneutrinos betrachtet. Es ergeben sich erwartungsgemäß längere erforderliche Messzeiten. Unter Beachtung einer Detektoreffizienz bezüglich Energie- und Winkelauflösung ($\sigma_e = 0.1 E_\nu + 1 \text{ GeV}$, $\sigma_\theta = 5^\circ$) betragen die erforderlichen Messzeiten für eine 5σ -Aussage ohne Elektroneneutrino-Untergrund 21.16 Mt·yr und mit Elektroneneutrino-Untergrund 26.26 Mt·yr. Bei Betrachtung zweier "worst-case" – Szenarien, zeigte sich jedoch, dass sich der Einfluss der Elektroneneutrinos in Grenzen hält. Falls jedes Elektron als Myon rekonstruiert wird, so ergeben sich dennoch erträgliche Verlängerungen der erforderlichen Messzeit von 27.19 Mt·yr (mit Detektorauflösung), während ein Fehlen von Myonen sich mit einer erforderlichen Messzeit von 55.17 Mt·yr erheblich stärker auf die erfolgreiche Bestimmung der Neutrinomassenhierarchie auswirkt.

Es werden weitere Studien benötigt, die einige andere Parameter und ihren Einfluss auf die erfolgreiche Bestimmung der Massenhierarchie zeigen. Interessant wäre zudem die Betrachtung von Monte Carlo Simulationen bezüglich der Missidentifikation. Weiterhin wurde in dieser Arbeit der Einfluss des Tauneutrinos vollkommen vernachlässigt. Auch hier ergeben sich Möglichkeiten der Missidentifikation, da ein Myon nicht durch ein Myoneneutrino entstanden sein muss. Diese Arbeit dient als grobe Orientierung, um den Einfluss des Elektroneneutrino-Untergrundes bei einer Myoneneutrino-Messung zur Bestimmung der Massenhierarchie einschätzen zu können. Eine genauere Betrachtung sollte in weiteren Arbeiten mittels Monte Carlo Simulationen erfolgen.

6. Literaturverzeichnis

Literatur

- [1] N. Schmitz. *Neutrino Physik*. Teubner, Stuttgart, 1997
- [2] T.K. Gaisser, M. Honda. *Flux of atmospheric neutrinos*. arXiv:hep-ph/0203272, 2002
- [3] M. Honda, T. Kajita, K. Kasahara, S. Midorikawa. *Improvement of low energy atmospheric neutrino flux calculation using the JAM nuclear interaction model*. arXiv:1102.2688v1 [astro-ph.HE] 14 Feb 2011
- [4] Mattias Blennow and Alexei Yu. Smirnov, *Neutrino Propagation in Matter*, Advances in High Energy Physics, vol. 2013, Article ID 972485, 33 pages, 2013. doi:10.1155/2013/972485
- [5] Los Alamos Science, Number 25, 1997.
<http://www.fas.org/sgp/othergov/doe/lanl/pubs/number25.htm>
- [6] Prof. Dr. Gisela Anton [Private communication].
- [7] D.Franco, C.Jollet, A.Kouchner, V.Kulikovskiy, A.Meregaglia, S.Perasso, T.Pradier, A.Tonazzola and V.Van Elewycka. *Mass hierarchy discrimination with atmospheric neutrinos in large volume ice/water Cherenkov detectors*. arXiv:1301.4332v2 [hep-ex] 14 Mar 2013
- [8] D. V. Forereo, M. Tortola and J. W. F. Valle. *Global status of neutrino oscillation parameters after Neutrino-2012* Phys. Rev. D 86, 073012 (2012)
- [9] Stephen F King, Christoph Luhn. *Neutrino mass and mixing with discrete symmetry*. doi:10.1088/0034-4885/76/5/056201, August 2013
- [10] R. P. Litchfield. *(Direct) Measurement of θ_{13}* . arXiv:1209.3884v2 [hep-ex] 26 Sep 2012
- [11] D. J. Ernst, B. K. Cogswell, H. R. Burroughs, J. Escamilla-Roa, D. C. Latimer. *Neutrino Oscillations: Hierarchy Question*. arXiv:1303.4790v1 [nucl-th] 19 Mar 2013
- [12] Preliminary Reference Earth Model (PREM) (Dziewonski & Anderson, 1981).
http://geophysics.ou.edu/solid_earth/prem.html, Juli 2013
- [13] W.R. Leo. *Techniques for Nuclear and Particle Physics Experiments*. Springer, Heidelberg, 1994
- [14] <http://www.lhc-facts.ch/index.php?page=rich>, August 2013
- [15] T. DeYoung. *Particle Physics in Ice with IceCube DeepCore*. arXiv:1112.1053v1 [astro-ph.HE] 5 Dec 2011

- [16] A. Kouchner. *ORCA status report*. 04/12/2012.
http://www.apc.univ-paris7.fr/Downloads/antares/Antoine/ORCA_Status_281112.pdf
- [17] Propriety KM3NeT Collaboration. www.km3net.org, August 2013
- [18] S. Hallmann. *Sensitivity of ORCA to the neutrino mass hierarchy*. Bachelorarbeit, ECAP, Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg, 04.04.2013
Skripte: <http://svn.km3net.physik.uni-erlangen.de/sandbox/shallmann/orca/>, Juli 2013
- [19] Atmospheric Neutrino Flux Tables by HKKM (2011).
<http://www.icrr.u-tokyo.ac.jp/~mhonda/nflx2011/index.html>, Juli 2013
- [20] Evgeny Kh. Akhmedov, Michele Maltoni, Alexei Yu. Smirnov. *1-3 leptonic mixing and the neutrino oscillograms of the Earth*. JHEP05(2007)077
- [21] Jannik Hofestädt. [Private communication]
- [22] Raj Gandhi, Chris Quigg, Mary Hall Reno, Ina Sarcevic. *Ultrahigh-energy neutrino interactions*. AstroparticlePhysics5 (1996)8I- 1IO
- [23] E. Kh. Akhmedov, Soebur Razzaque, A. Yu. Smirnov. *Mass hierarchy, 2-3 mixing and CP-phase with Huge Atmospheric Neutrino Detectors*. arXiv:1205.7071v6 [hep-ph] 26 Apr 2013
- [24] Hans-Otto Georgii. *Stochastik - Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik*. 3. Auflage, de Gruyter, Berlin, 2007.
- [25] Ulrich Krengel. *Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik*. 3. Auflage, Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, 1991.
- [26] W. Heitler. *The quantum theory of radiation*. Third Edition, Oxford University Press, London, 1954
- [27] Thomas Heid. [Private communication]
- [28] S. Galatà. ORCA workshop, APC, Paris, 18.04.2013

Danksagungen

Abschließend möchte ich mich bei all denjenigen bedanken, die mir mit Rat und Tat bei meiner Bachelorarbeit zur Seite standen.

Zuerst danke ich Frau Prof. Anton, die mir verschiedene mögliche Themen am ECAP vorgestellt und mich schließlich zu diesem spannenden Thema im Bereich der Neutrino-physik geführt hat.

Auch bedanke ich mich für die unterstützenden Beiträge zum effektiven Volumen durch Jannik Hofestädt und zu den Missidentifikationsraten durch Thomas Heid.

Weiterhin bin ich sehr dankbar für die tolle Unterstützung von Steffen Hallmann, der mir viele nützliche Tipps und Hilfestellungen geben konnte.

Zu guter Letzt möchte ich mich besonders bei meinem Betreuer Thomas Eberl bedanken, der mir in einigen längeren Gesprächen und vielen Mails sehr gute Anregungen und Hilfestellungen geboten hat.

A. Einfluss der Breite der Winkelverteilung in der Richtungsrekonstruktion eines Elektrons als Myon

Aufgrund der begrenzten Detektoreffizienz bezüglich der Teilchenidentifikation, wird eine gaußförmige Verschmierung in Richtung und Energie der fälschlicherweise als Myonen registrierten Elektronen vorgenommen. In der Arbeit wird eine Breite in der Winkelverteilung von $\sigma_\theta = 25^\circ$ angenommen. Zusätzlich wird untersucht, wie groß der Einfluss der gewählten Breite auf die Sensitivitätsplots ist. Dazu werden P-Value Plots für $\sigma_\theta = 10^\circ, 20^\circ, 25^\circ, 30^\circ, 40^\circ, 50^\circ$ generiert (Abb. 36).

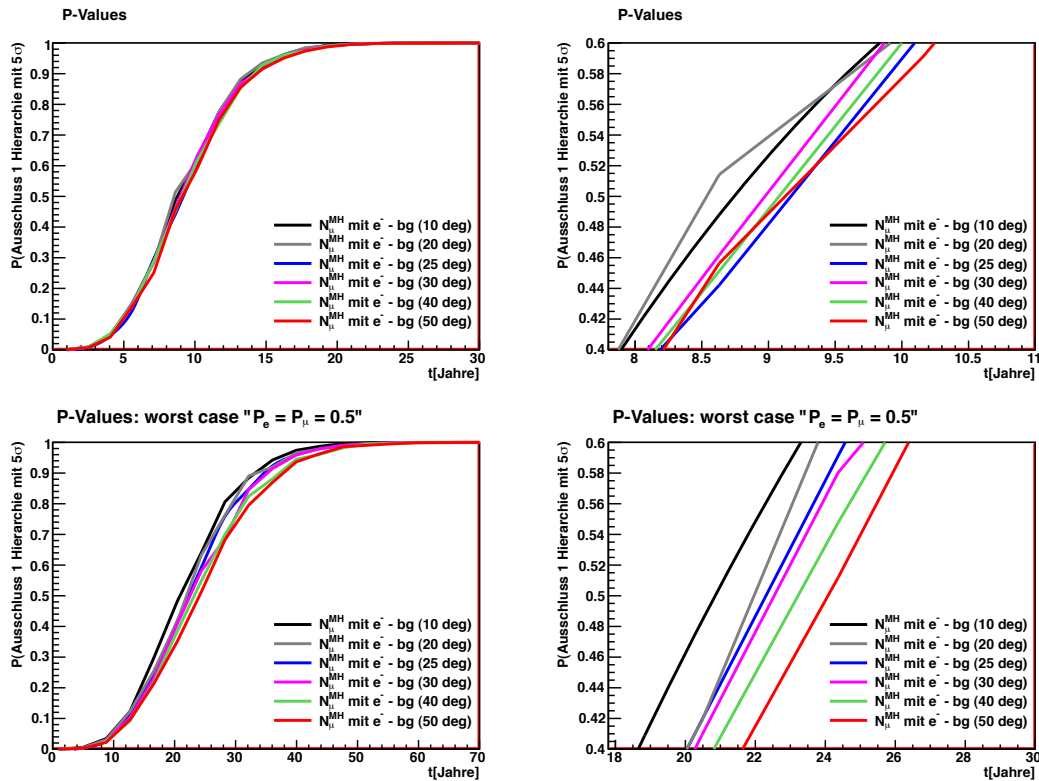


Abbildung 36: P-Value für verschiedene Breiten $\sigma_\theta = 10^\circ, 20^\circ, 25^\circ, 30^\circ, 40^\circ, 50^\circ$ in der Winkelverschmierung für die Richtungsrekonstruktion eines Elektrons als Myon

Der Vergleich der "worst case"-Szenarien für unterschiedliche Breiten in der Winkelverschmierung ergibt sich als maximaler zeitlicher Abstand bei gleichem P-Value $\approx 50\%$ etwa 4 Jahre, für die realen Fälle etwa 1 Jahr. Eine breitere Verschmierung bedingt eine Verschlechterung in der Sensitivität, die jedoch vergleichsweise gering ist. Bedeutender ist die Energieauflösung von ORCA, die nach [18] einen wesentlichen Einfluss auf die erfolgreiche Bestimmung der Massenhierarchie in angemessener Zeit hat.

Erklärung

Hiermit bestätige ich, dass ich die eingereichte Bachelorarbeit selbständig verfasst und nur unter Verwendung der angegeben Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe.

Veronika Ludwig

Erlangen, den 27.09.2013