

Simulationsstudien zu diffusem Teilchentransport in kosmischen Magnetfeldern

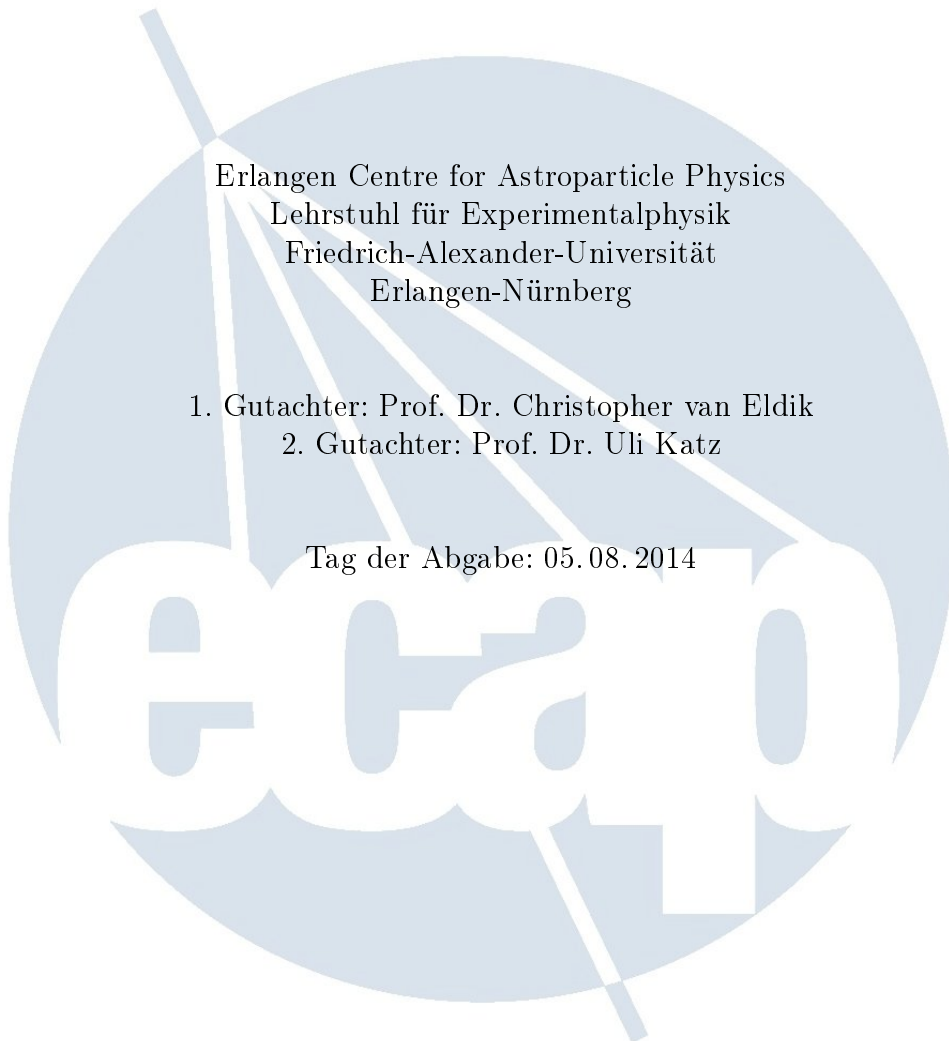
Bachelorarbeit

vorgelegt von
Maximilian Oberndörfer

Erlangen Centre for Astroparticle Physics
Lehrstuhl für Experimentalphysik
Friedrich-Alexander-Universität
Erlangen-Nürnberg

1. Gutachter: Prof. Dr. Christopher van Eldik
2. Gutachter: Prof. Dr. Uli Katz

Tag der Abgabe: 05.08.2014



Inhaltsverzeichnis

1	Motivation	5
1.1	Entdeckung diffuser TeV-Gammastrahlung im Galaktischen Zentrum	5
1.2	Mögliche Erklärung des Ursprungs der diffusen Emission	6
2	Grundlagen zur Verfolgung von Teilchen in Magnetfeldern	9
2.1	Teilchenbewegung im homogenen Magnetfeld	9
2.2	Teilchenbewegung im turbulenten Magnetfeld	11
2.2.1	Modellierung des turbulenten Magnetfelds	11
2.2.2	Einteilchenbewegung im turbulenten Magnetfeld	14
2.2.3	Ensemblebewegung im turbulenten Magnetfeld	15
3	Ergebnisse der Simulationen	18
3.1	Test verschiedener Turbulenzmodelle	18
3.2	Variation der maximalen Magnetfeldwellenlänge	22
3.3	Ableitung von Diffusionskoeffizienten	27
3.4	Vergleich zu vorherigen Arbeiten	28
4	Fazit	30
5	Anhang	32

1. Motivation

1.1 Entdeckung diffuser TeV-Gammastrahlung im Galaktischen Zentrum

Bis zum heutigen Tag ist die Quelle kosmischer Strahlung nicht eindeutig bestimmt. Aus diesem Grund gibt es zu diesem Thema immer wieder Veröffentlichungen, welche mögliche Quellen und Messungen mit Indizien auf diese Quellen vorstellen. In diesem einführenden Abschnitt werden die Erkenntnisse aus [2] zusammengefasst, um einen kurzen Überblick über die Thematik zu liefern.

Eine Methode kosmische Strahlung nachzuweisen und zu untersuchen, liefert die Betrachtung von Gammastrahlung, welche bei Interaktion der kosmischen Strahlung mit den Molekülen interstellaren Gases entsteht. Die für Emission hochenergetischer Gammastrahlung verantwortlichen Prozesse können in leptonische und hadronische Prozesse unterteilt werden. Unter die leptonischen Wechselwirkungsprozesse fallen der inverse Compton-Effekt und die Bremsstrahlung, während der hadronische Wechselwirkungsprozess den Zerfall neutraler Pionen, welche bei Wechselwirkung kosmischer Protonen miteinander entstehen, umfasst.

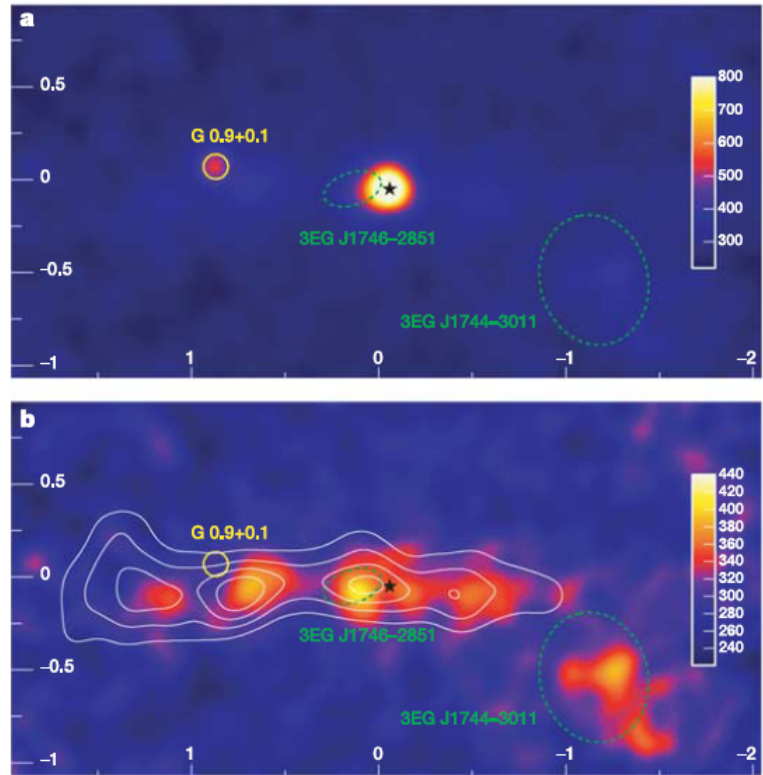
Die frühe Untersuchung der Galaktischen Ebene mit dem Energetic Gamma Ray Telescope (EGRET), welches auf dem NASA Satelliten Compton Gamma Ray Observatory (CGRO) angebracht war, zeigte bereits, dass es möglich war, kosmische Strahlung mithilfe von Gamma-Emission aus molekularen Gaswolken nachzuweisen. Dabei fand man heraus, dass die Flussdichte der Gammastrahlung ungefähr der Dichteverteilung interstellaren Gases folgt. Aufgrund der beschränkten Auflösung von EGRET mit $\approx 1^\circ$ konnten damit allerdings nur die nächsten molekularen Gaswolken aufgelöst werden und das Galaktische Zentrum erschien als kontinuierliches Strahlungsband.

Dagegen zeigen Aufnahmen des High Energy Stereoscopic System (H.E.S.S.) in Abbildung 1.1a deutliche Punktquellen im Bereich des Galaktischen Zentrums. Dies liegt zum einen daran, dass das H.E.S.S. mit einer Winkelauflösung von besser als 0.1° ausgestattet ist, allerdings auch an dem von ihm erreichten Energiebereich. Während mit satellitengestützten Detektoren ein Energiebereich $\text{MeV} \sim 10 \text{ GeV}$ erreicht werden kann, arbeitet das H.E.S.S. im Teraelektronenvolt-Bereich. Es konnten deutliche Punktquellen im Bereich des supermassiven Schwarzen Loches Sagittarius A* und des Supernova-Überrests oder Pulsarwindnebels G0.9+0.1 gefunden werden. Durch Abzug des besten Fit-Models von punktförmiger Emission an den Stellen der beiden Quellen ergibt sich aus Abbildung 1.1a die untere Abbildung 1.1b.

Man erkennt hier einen ausgedehnten Emissionsbereich von diffuser Gammastrahlung am Ort der unidentifizierten EGRET-Quelle 3EG J1744-3011 und eine wesentlich größer ausgedehnten Emissionsbereich diffuser Strahlung nahe dem Galaktischen Zentrum. Dieser größere Emissionsbereich erstreckt sich über 2° entlang der Galaktischen Ebene und ca. 0.2° in Galaktischer Breite. Unter Annahme von Emission der Gammastrahlung nahe dem Galaktischen Zentrum in 8.5 kpc Entfernung entspricht die beobachtete Höhe ca. 30 pc. Dies wiederum korrespondiert sehr gut mit der Ausdehnung von Molekülwolken interstellaren Gases in diesem Bereich, welche

Abbildung 1.1: Aufnahmen des Galaktischen Zentrums im sehr hochenergetischen γ -Strahlungsbereich

(a) Ereigniszahl-Karte von γ -Strahlen
 (b) gleiches Bild nach Abzug der zwei dominanten Punktquellen. Es ist ein ausgedehntes Band an Gammastrahlung erkennbar. Die Achsen sind Galaktische Länge (x) und Galaktische Breite (y) in Grad. Die Farbskala ist in dimensionslosen Events angegeben. Die weißen Konturlinien deuten die Dichteverteilung molekularen Gases, bestimmt mithilfe der CS-Emission, an. Die Position und Größe des möglichen Supernova-Überrests G0.9+0.1 wird durch den gelben Kreis gekennzeichnet. Der schwarze Stern markiert die Position von Sagittarius A*. Die 95 % Konfidenz-Bereiche der Positionen der beiden unidentifizierten EGRET-Quellen sind durch die gestrichelten, grünen Ellipsen angedeutet.



anhand ihrer CO- und CS-Emission nachgewiesen wurden [7], und deren Dichteverteilung in Abbildung 1.1b mit weißen Konturlinien eingezeichnet sind.

Die Korrelation zwischen Gammastrahlungsemission und vorhandener Materie legt die Vermutung nahe, dass es sich hierbei um die Wechselwirkung kosmischer Strahlung mit interstellarem Gas handelt.

Nun jedoch stellt sich die Frage, wo diese diffuse γ -Strahlung und somit die kosmische Strahlung ihren Ursprung hat.

1.2 Mögliche Erklärung des Ursprungs der diffusen Emission

Für den Fall, dass die Energieverteilung der kosmischen Strahlung einem Potenzgesetz folgt, liegt der spektrale Index dieser γ -Strahlung nahe an dem der kosmischen Strahlung selbst. Vergleicht man die Dichteverteilung des Gases mit dem Fluss der Gammastrahlung, so erkennt man, dass beide Größen gut miteinander korrelieren. Wie man aus Abbildung 1.2 entnehmen kann, besitzt der spektrale Index einen Wert von 2.3, welcher wesentlich härter ist, als der in der solaren Nachbarschaft mit einem Wert von 2.75.

Dies, sowie die wesentlich höher als erwartete Flussdichte von Gammastrahlung im TeV-Bereich legen nahe, dass eine zusätzliche Quelle kosmischer Strahlung neben dem kosmischen Strahlungs-See im Bereich des Galaktischen Zentrums vorhanden sein muss. Die Energie, die benötigt wird, um diese zusätzliche Komponente zu beschleunigen wird auf 10^{49} erg, wenn das beobachtete Spektrum im Bereich 4 – 40 TeV liegt, bzw. $\approx 10^{50}$ erg, wenn das beobachtete Spektrum im Bereich 10^9 eV bis 10^{15} eV liegt, geschätzt.

Betrachtet man eine typische Supernova-Explosion mit Energie 10^{51} erg, hätte der beobachtete Überschuss kosmischer Strahlung in einem einzigen solchen Ereignis unter der Annahme, dass ca. 10 % der Energie in die Beschleunigung kosmischer Strahlung fließen, entstanden sein können. Außerdem hätte dieses Ereignis vor nicht allzu langer Zeit stattfinden müssen, da die

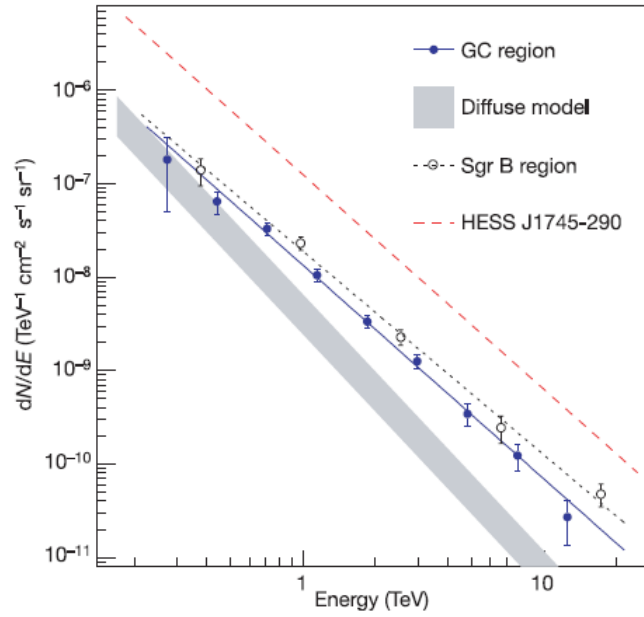


Abbildung 1.2: Energieverteilung der Galaktischen kosmischen Strahlung

Fluss der γ -Strahlung pro Steradian im Bereich des Galaktischen Zentrums (Datenpunkte) verglichen mit dem erwarteten Fluss unter Annahme eines Spektrums der kosmischen Strahlung gleich dem in der solaren Nachbarschaft (graues Band).

Die ausgefüllten Kreise zeigen das Spektrum im Bereich der Galaktischen Länge $l < 0.8^\circ$ und Galaktischer Breite $b < 0.3^\circ$. Dieses lässt sich durch ein Potenzgesetz der Form $dN/dE = k \cdot E^{-\Gamma}$, wobei E in TeV angegeben ist, beschreiben. Die Werte der Parameter ergeben sich dann zu $k = (1.73 \pm 0.13_{stat} \pm 0.35_{sys}) \cdot 10^{-8} \text{ TeV}^{-1} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ sr}^{-1}$ und $\Gamma = 2.29 \pm 0.07_{stat} \pm 0.02_{sys}$. Das graue Band zeigt den Fluss an γ -Strahlung, welcher aufgrund von π^0 -Zerfall in dieser Region erwartet wird unter Annahme eines Spektrums der kosmischen Strahlung gleich dem in der solaren Nachbarschaft und einer Masse des Gases in dieser Region von $(1.7 - 4.4) \cdot 10^7$ Sonnenmassen, welche anhand von CS-Messungen geschätzt wurde. Ab einer Energie von 1 TeV ist der gemessene Verlauf einen Faktor von 3 – 9 größer als der erwartete.

Die größte Emission abseits der hellen zentralen Quelle HESS J1745-290 tritt nahe dem Sgr B Komplex im Bereich $0.3^\circ < l < 0.8^\circ$, $-0.3^\circ < b < 0.2^\circ$ auf, dessen Energiespektrum mithilfe der offenen Kreise eingezeichnet ist. Das Spektrum der zentralen Quelle HESS J1745-290 ist durch die gestrichelte Linie zum Vergleich eingezeichnet.

kosmische Strahlung noch nicht aus dem Galaktischen Zentrum diffundiert ist.

Die betrachtete Morphologie und das Spektrum der Gammastrahlung lassen den Schluss zu, dass ein oder mehrere Beschleuniger kosmischer Strahlung in den letzten 10 000 Jahren im Galaktischen Zentrum aktiv waren.

Der Umstand, dass der Photon-Index der diffusen Strahlung innerhalb der Fehler gleich dem der zentralen Quelle HESS J1745-290 ist, lässt diese als eine mögliche Quelle der kosmischen Strahlung erscheinen. In der 1'-Fehlerbox um dieses Objekt finden sich zwei mögliche Quellen, welche als Quellen für HESS J1745-290, und somit als Quellen kosmischer Strahlung, in Frage kommen. Erstere ist der Supernova-Überrest Sagittarius A East mit einem geschätzten Alter von 10 kyr, und zweitere das supermassive Schwarze Loch Sgr A* im Zentrum unserer Galaxie. Bei einer geringen Anzahl an Quellen der kosmischen Strahlung wird das hadronische Modell, bei dem die diffuse Gammastrahlung durch Zerfall neutraler Pionen hervorgerufen wird, bevorzugt. Der Grund für diese Bevorzugung ist, dass Protonen aufgrund ihrer größeren Masse eine längere mittlere Wegstrecke bis zum Ort ihrer Wechselwirkung als Elektronen zurücklegen und sich unter der Annahme von wenigen Quellen für die kosmische Strahlung nur damit das beobachtete Bild aus Abbildung 1.1b ergeben kann.

Eine alternative Möglichkeit die Emission von Gammastrahlung im Galaktischen Zentrum zu erklären, ist jedoch, dass eine Population an Elektronenbeschleunigern das beobachtete Gam-

maspektrum via inverser Compton-Streuung erzeugt. Ausgedehnte Objekte mit dieser Art der Teilchenemission mit einem spektralen Photon-Index nahe 2.3 treten an anderer Stelle in unserer Galaxie auf. Die Hauptpopulation dieser Quellen, wie zum Beispiel Pulsarwindnebel, würde dann ungefähr der Verteilung der molekularen Gaswolken folgen, also die Verteilung der einzelnen Quellen würde der Verteilung der Gaswolken entsprechen. Allerdings würden TeV-Elektronen im starken Photon- und hohen Magnetfeld in und um die molekularen Gaswolken sehr schnell an Energie verlieren. Aus diesem Grund werden eher punktförmige denn diffuse Quellen erwartet, die gleichzeitig noch deutlich im Röntgen-Bereich zu sehen sein sollten. Um dennoch eine Gamma-Emission zu erhalten, die der beobachteten entspricht, wird die Existenz ungefähr zehn oder mehr solcher Quellen benötigt. Dies scheint jedoch sehr unwahrscheinlich, weshalb man den neutralen Pion-Zerfall hervorgerufen durch kosmische Protonen als wahrscheinlichstes Szenario betrachtet.

Ist man jetzt in der Lage, den Transport der Protonen zu verstehen, und noch unbekannte Parameter, wie die Magnetfeldstärke des Magnetfeldes in den molekularen Gaswolken zu bestimmen, ist man, was die Bestimmung von Quellen kosmischer Strahlung angeht, einen großen Schritt weiter. Das liefert also die Motivation die Bewegung geladener Teilchen in turbulenten kosmischen Magnetfeldern zu analysieren.

Diese Arbeit baut auf den Erkenntnissen einer noch nicht veröffentlichten Masterarbeit zum diffusen Teilchentransport in turbulenten kosmischen Magnetfeldern auf. Die zur Simulation und Auswertung der Daten benutzte Software wurde von Alexander Ziegler im Rahmen seiner Masterarbeit entworfen und erstellt.

Ziel dieser Arbeit ist es, den Einfluss verschiedener Turbulenzmodelle und verschiedener maximaler Wellenlängen des turbulenten Magnetfelds auf die bereits bestehende Simulation zu erforschen, den Einfluss der maximalen Wellenlänge des turbulenten Feldes auf aus der Simulation abgeleitete Diffusionskoeffizienten zu untersuchen und unsere Ergebnisse mit vorangegangenen Arbeiten zu vergleichen. Zunächst wird im ersten Teil der mathematische Formalismus eingeführt, der zur Beschreibung von diffusem Teilchentransport in turbulenten Magnetfeldern benötigt wird. Dies umfasst den Teilchentransport geladener Teilchen in homogenen und turbulenten Magnetfeldern und die Diffusion von Teilchenensembles geladener Teilchen in turbulenten Magnetfeldern. Im zweiten Teil der Arbeit werden die aus der Simulation gewonnenen Daten vorgestellt sowie die Ergebnisse interpretiert. Das Fazit fasst schlussendlich noch einmal alle wichtigen Erkenntnisse zusammen.

2. Grundlagen zur Verfolgung von Teilchen in Magnetfeldern

In diesem Kapitel wird die nötige Mathematik eingeführt, die Vorgehensweise beim Simulieren des diffusen Teilchentransports dargestellt und diese an Beispielen erläutert.

2.1 Teilchenbewegung im homogenen Magnetfeld

Um die Bewegung von Teilchen in den komplexen Magnetfeldern im interstellaren Medium zu verstehen, ist es zunächst essentiell die Bewegung von Teilchen in einfachen, homogenen Magnetfeldern zu bestimmen, was im Folgenden geschehen soll. Die hier aufgeführte Herleitung zur Teilchenbewegung in einem solchen Feld folgt derer aus [5].

Im Folgenden wird die Bewegung einer Ladung e in einem homogenen Magnetfeld \vec{B} , welches in Richtung der z-Achse zeigt, betrachtet. Die Bewegungsgleichung

$$\dot{\vec{p}} = \frac{e}{c} \vec{v} \times \vec{B} \quad (2.1)$$

wird mithilfe des Ausdrucks $\vec{p} = \frac{\epsilon \vec{v}}{c}$ mit ϵ der im Magnetfeld konstanten Energie des Teilchens folgenderweise umgeformt.

$$\frac{\epsilon}{c^2} \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{e}{c} \vec{v} \times \vec{B} \quad (2.2)$$

Diese Formel lässt sich in drei Komponenten für jede Richtung zerlegen.

$$\dot{v}_x = \omega v_y, \quad \dot{v}_y = -\omega v_x, \quad \dot{v}_z = 0 \quad (2.3)$$

mit $\omega = \frac{ecH}{\epsilon}$. Um diese Gleichungen zu lösen, wird nun die zweite Gleichung in (2.3) mit i multipliziert und anschließend mit der ersten Gleichung addiert, was folgendes Ergebnis liefert.

$$\frac{d}{dt}(v_x + iv_y) = -i\omega(v_x + iv_y) \quad (2.4)$$

Hieraus folgt

$$v_x + iv_y = ae^{-i\omega t} \quad (2.5)$$

mit a als komplexer Konstante. Diese lässt sich wiederum in der Form $a = v_{0t}e^{-i\alpha}$, wobei v_{0t} und α reell sind, schreiben. Daraus folgt

$$v_x + iv_y = v_{0t}e^{-i(\omega t + \alpha)} \quad (2.6)$$

und nach Aufspaltung in Real- und Imaginärteil

$$v_x = v_{0t} \cdot \cos(\omega t + \alpha), \quad v_y = -v_{0t} \cdot \sin(\omega t + \alpha) \quad (2.7)$$

Durch die Anfangsbedingungen lassen sich die Konstanten v_{0t} und α bestimmen. α ist die Anfangsphase und für v_{0t} gilt mit Formel (2.7):

$$v_{0t} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_{0t}^2 \cdot (\cos^2(\omega t + \alpha) + \sin^2(\omega t + \alpha))}$$

Dies bedeutet, dass v_{0t} der konstante Betrag der Geschwindigkeit des Teilchens in der xy-Ebene ist.

Bei einer Integration der beiden Formeln aus (2.7) finden sich für die x- und y-Richtung folgende zwei Lösungen für die Bewegungsgleichung

$$x = x_0 + R \cdot \sin(\omega t + \alpha), \quad y = y_0 + R \cdot \cos(\omega t + \alpha) \quad (2.8)$$

mit

$$R = \frac{v_{0t}}{\omega} = \frac{v_{0t}\epsilon}{ecB} = \frac{cp_t}{eB} \quad (2.9)$$

mit R dem sogenannten Gyroradius und p_t der Projektion des Impulses in die xy-Ebene.

Aus der dritten Gleichung von (2.3) findet man zudem $v_z = v_{0z}$ und

$$z = z_0 + v_{0z}t \quad (2.10)$$

Aus (2.8) und (2.10) kann man also folgern, dass sich ein geladenes Teilchen in einem homogenen Magnetfeld entlang einer Schraubenlinie um die Magnetfeldachse, in diesem Fall die z-Achse, bewegt. Der Radius der Schraubenbahn wird durch (2.9) festgelegt, während die Geschwindigkeit des Teilchens bei einer solchen Bewegung konstant bleibt. Bei einer angenommenen Geschwindigkeit von $v \approx c$, also wenn den Teilchen genug Energie zur Verfügung steht, um annähernd die Lichtgeschwindigkeit zu erreichen, ergibt sich die Umlaufdauer T wie folgt. Aus $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ ergibt sich mit $\vec{r} = R \cdot \hat{e}_r$, $\omega = \frac{2\pi}{T}$ sowie $\vec{\omega} \perp \hat{e}_r$ und obiger Annahme für die Geschwindigkeit

$$\begin{aligned} c &= \frac{2\pi}{T} \cdot R \\ T &= \frac{2\pi R}{c} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Für den Spezialfall $v_{0z} = 0$ bildet die Teilchenbahn einen Kreis innerhalb der xy-Ebene, ebenfalls mit Radius R . Aus den obigen Formeln lässt sich zudem die Kreisfrequenz ω entnehmen mit welcher sich das Teilchen entlang seiner Kreisbahn bewegt.

Um dieses Verhalten mithilfe einer Software darzustellen wird ein homogenes, in z-Richtung zeigendes Magnetfeld mit einer Magnetfeldstärke von $B = 50 \mu\text{G}$ erzeugt. Die magnetische Flussdichte ist hier in *Gauß* angegeben, wobei $1 \text{ G} = 0.1 \text{ mT}$ [4] ist. In dieses Magnetfeld wird anschließend ein Proton am Ort $(0, 0, 0)^T$ mit Energie $E = 1 \text{ TeV}$ injiziert und mit einer zufällig isotrop bestimmten Impulsrichtung versehen. Aus der Anfangsposition, dem Geschwindigkeitsvektor und der Richtung und Stärke des Magnetfelds lässt sich die neue Position des Teilchens nach einem Zeitintervall $dt = \frac{T}{200}$ mit Gleichungen (2.8) und (2.10) bestimmen. Die Position des Teilchens wird anschließend alle dt neu berechnet.

Die Ergebnisse dieser Berechnung sind in Abbildung 2.1 zu erkennen. Die verwendete Längeneinheit in dieser Arbeit ist die astronomische Einheit *parsec*, wobei $1 \text{ pc} = 3.0856776 \cdot 10^{16} \text{ m}$ [4].

Im CGS-System, wobei *C* für Centimeter, *G* für Gramm und *S* für Sekunde steht, schreiben sich die Einheiten Gauß und Volt nach [6] folgenderweise.

$$\begin{aligned} 1 \text{ G} &= 1 \sqrt{\frac{g}{\text{cm} \cdot \text{s}^2}} \\ 1 \text{ V} &= (10^8 \text{ c}^{-1}) \sqrt{\frac{g \cdot \text{cm}}{\text{s}^2}} \end{aligned}$$

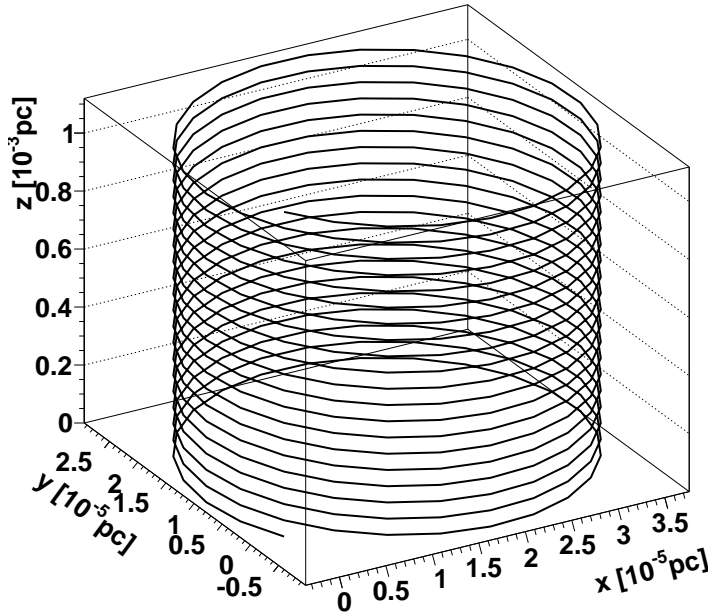


Abbildung 2.1: Die Formeln zur Beschreibung der Teilchenbahn sind richtig implementiert, das Teilchen verfolgt eine Schraubenbahn.

In diesem Fall ist die Teilchenbahn die eines Protons mit Energie 1 TeV versehen mit einer zufälligen Impulsrichtung in einem homogenen, $50 \mu\text{G}$ starken, in z -Richtung zeigenden Magnetfeld für 20 Umlaufdauern dargestellt.

Die erkennbaren Ecken entlang der Schraubenbahn zeigen, dass die Teilchenposition nur zu bestimmten Zeitschritten $dt = \frac{T}{25}$ ermittelt wurde.

Diese Umrechnung ist nötig, da die Herleitung zur Teilchenbewegung im homogenen Magnetfeld in diesem System erfolgte. In diesen Einheiten lässt sich aus Formel (2.9) der Gyroradius für das simulierte Teilchen berechnen. Die Annahme hierbei ist, dass die Geschwindigkeit v_{0t} des Teilchens $\approx c$ ist. Der Gyroradius berechnet sich dann wie folgt.

$$\begin{aligned}
 R &= \frac{v_{0t}\epsilon}{ecB} = \frac{c \cdot 1 \text{ TeV}}{e \cdot c \cdot 50 \mu\text{G}} \\
 &= \frac{10^{12} \text{ V}}{50 \cdot 10^{-4} \text{ G}} \\
 &\approx 6.67 \cdot 10^{13} \frac{\sqrt{\frac{g \cdot \text{cm}}{\text{s}^2}}}{\sqrt{\frac{g}{\text{cm} \cdot \text{s}^2}}} = 6.67 \cdot 10^{13} \text{ cm} \\
 &\approx 2.16 \cdot 10^{-5} \text{ pc}
 \end{aligned}$$

Dieser Radius lässt sich aus Abbildung 2.1 ablesen.

2.2 Teilchenbewegung im turbulenten Magnetfeld

Nachdem nun der mathematische Hintergrund zum Beschreiben einer Teilchenbahn in einem homogenen Magnetfeld beleuchtet, und die Richtigkeit der Simulation für diesen Fall gezeigt wurde, widmet sich der nächste Teil der Arbeit dem mathematischen Werkzeug zur Erzeugung eines turbulenten Magnetfeldes und der für die Simulation verwendeten Methodik.

2.2.1 Modellierung des turbulenten Magnetfelds

In der Magnetohydrodynamik (MHD) werden turbulente Magnetfelder typischerweise vereinfacht beschrieben. Die Vorgehensweise hierbei ist, die magnetische Flussdichte des turbulenten Feldes mit einer gegebenen Anzahl an ebenen Wellen, welche das turbulente Magnetfeld beschreiben sollen, nach einem Potenzgesetz verteilt zu wählen, so dass die spektrale Energiedichte $\omega \propto k^{-\Gamma}$ ist.

Je nach verwendetem Turbulenzmodell lassen sich für den Index Γ verschiedene Werte annehmen. Die hier verwendeten Turbulenzmodelle entsprechen denen aus [3] und können folgenderweise den Indices zugeordnet werden:

$\Gamma = 1$ bei Verwendung der Bohm-Turbulenz, $\Gamma = \frac{3}{2}$ bei Verwendung der Kraichnan-Turbulenz und $\Gamma = \frac{5}{3}$ bei Verwendung der Kolmogorov-Turbulenz.

„Die erste, numerische Methode ionische Bewegung in statischen turbulenten Magnetfeldern zu beschreiben wurde 1994 von Giacalone und Jokipii entwickelt.“(nach [3]) Diese Arbeit wurde später von Fatuzzo et al. [3] weiterentwickelt. Die von uns verwendeten Berechnungen gleichen denen aus [3] in weiten Teilen, dennoch finden sich einige Unterschiede, weshalb unsere Berechnungen hier noch einmal aufgeführt werden sollen. Analog zur in diesem Artikel beschriebenen Vorgehensweise soll zur Simulation ein homogenes Magnetfeld mit gleich starker turbulenter Komponente erzeugt werden.

Zunächst wird die mathematische Formulierung der Erzeugung eines turbulenten Magnetfeldes behandelt und die daraus abgeleiteten Erwartungen anschließend mit den simulierten Werten verglichen.

Typischerweise wird das turbulente Magnetfeld mit Hilfe einer diskreten Anzahl an ebenen Wellen der Form

$$\delta \vec{B} = \sum_{n=1}^{N_k} B_n [\cos \alpha_n \hat{x}' \pm i \sin \alpha_n \hat{y}'] \cdot e^{ik_n z' + i\beta_n} \quad (2.12)$$

mit N_k Wellenvektoren k_n , welche auf einer logarithmischen Skala zwischen $k_{min} = \frac{2\pi}{\lambda_{max}}$ und $k_{max} = \frac{2\pi}{\lambda_{min}}$ äquidistant gewählt werden, beschrieben. Die Winkel α_n und Phasen β_n werden zufällig zwischen 0 und 2π ausgewählt, und die zufällige Wahl des Vorzeichens bestimmt die Helizität des Wellenvektors.

Um aus den ebenen Wellen ein effektives Magnetfeld zu bestimmen, müssen diese aus ihrem lokalen Koordinatensystem, in dem jede Welle in z-Richtung zeigt, in ein globales Koordinatensystem übergeführt werden. Dies geschieht mit folgender Rotationsmatrix

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) \cos(\Phi) & -\sin(\Phi) & \sin(\theta) \cos(\Phi) \\ \cos(\theta) \sin(\Phi) & \cos(\Phi) & \sin(\theta) \sin(\Phi) \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

wobei ϕ_n und θ_n zufällig gewählt werden, sodass $0 \leq \phi_n \leq 2\pi$ und $0 \leq \cos(\theta_n) \leq 1$. Die entsprechende Umkehrmatrix schreibt sich wie folgt.

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) \cos(\Phi) & \cos(\theta) \sin(\Phi) & -\sin(\theta) \\ -\sin(\Phi) & \cos(\Phi) & 0 \\ \sin(\theta) \cos(\Phi) & \sin(\theta) \sin(\Phi) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Die Amplitude jeder Welle lässt sich mit folgender Formel berechnen

$$B_n = B_{min} \cdot \left(\frac{k}{k_{min}} \right)^{\frac{-\Gamma+1}{2}} \quad (2.13)$$

wobei der Index Γ vom gewählten Turbulenzmodell abhängt. Eine ausführliche Herleitung des Exponenten $\frac{-\Gamma+1}{2}$ findet sich in Kapitel 5. Anhang. Die Feldstärke für das gesamte turbulente Feld ergibt sich dann über Aufsummieren zu

$$B_{Turb.} = \sum_{n=1}^{N_k} B_{min} \left(\frac{k_n}{k_{min}} \right)^{\frac{-\Gamma+1}{2}} \quad (2.14)$$

Wie bereits in Formel (2.12) ausgedrückt, werden ebene Wellen verwendet, um das turbulente Magnetfeld zu simulieren. Physikalisch relevant ist hierbei nur der Realteil dieser Wellen in der Form

$$\text{Re}[\delta \vec{B}] = \sum_{n=1}^{N_k} B_n [\cos(\alpha_n) \cdot \cos(k_n z' + \beta_n) \hat{x}' \pm \sin(\alpha_n) \cdot \sin(k_n z' + \beta_n) \hat{y}'] \quad (2.15)$$

Für den angenommenen Fall, dass nur ein einziger Wellenvektor $k = k_{min} := k_1$ verwendet wurde, um das Magnetfeld zu beschreiben, nimmt die Formel folgende Gestalt an.

$$\text{Re}[\delta \vec{B}] = B_1 [\cos(\alpha_1) \cdot \cos(kz' + \beta_1) \hat{x}' \pm \sin(\alpha_1) \cdot \sin(kz' + \beta_1) \hat{y}'] \quad (2.16)$$

Bildet man jetzt aus dem Quadrat

$$\text{Re}[\delta \vec{B}]^2 = B_1^2 [\cos^2(\alpha_1) \cdot \cos^2(kz' + \beta_1) \pm \sin^2(\alpha_1) \cdot \sin^2(kz' + \beta_1)] \quad (2.17)$$

den Mittelwert, erhält man folgendes Ergebnis.

$$\langle \text{Re}[\delta \vec{B}]^2 \rangle = B_1^2 [\cos^2(\alpha_1) \cdot \langle \cos^2(kz' + \beta_1) \rangle \pm \sin^2(\alpha_1) \cdot \langle \sin^2(kz' + \beta_1) \rangle] \quad (2.18)$$

$$= B_1^2 \left(\frac{1}{2} (\cos^2 \alpha_1 + \sin^2 \alpha_1) \right) = \frac{B_1^2}{2} \quad (2.19)$$

Aus der Abhängigkeit der Energiedichte von der Magnetfeldstärke $\omega \propto \vec{B}^2 = |\vec{B}|^2$ kann man für den Fall eines k-Vektors aus

$$\omega_{Turb.} \propto \frac{B_1^2}{2} \quad (2.20)$$

$$\omega_{hom.} \propto B_0^2 \quad (2.21)$$

$$(2.22)$$

und der Forderung, dass beide Energiedichten gleich groß sein sollen, folgern

$$\frac{B_1^2}{2} = B_0^2 \quad (2.23)$$

Unter der Annahme, dass eine genügend große Anzahl an zufällig polarisierten Wellen vorliegt, so dass sich alle Mischterme gegenseitig aufheben, lässt sich für den allgemeinen Fall Folgendes aussagen.

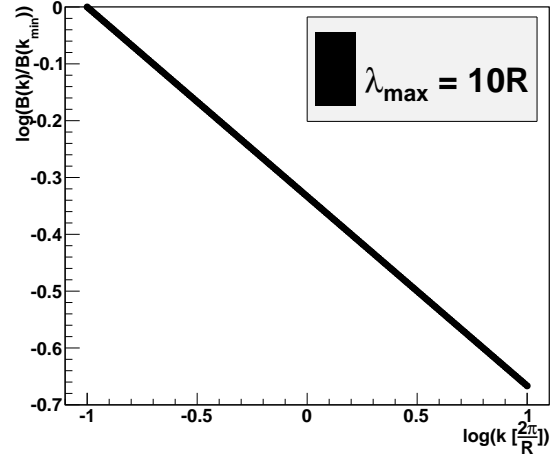
$$\sum_{n=1}^{N_k} B_n^2 = 2B_0^2 \quad (2.24)$$

Mit Formel (2.14) lässt sich daraus das Folgende herleiten.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N_k} B_n^2 &= B_{min}^2 \sum_{n=1}^{N_k} \left(\frac{k_n}{k_{min}} \right)^{-\frac{\Gamma+1}{2} \cdot 2} = 2B_0^2 \\ \Rightarrow B_{min} &= \sqrt{\frac{2B_0^2}{\left(\sum_{n=1}^{N_k} \frac{k_n}{k_{min}} \right)^{-\Gamma+1}}} \end{aligned} \quad (2.25)$$

Das simulierte Spektrum des Magnetfeldes ist für den Fall $\Gamma = \frac{5}{3}$ in Abbildung 2.2 dargestellt. Die Simulation liefert exakt das Ergebnis, welches anhand der vorher formulierten Mathematik erwartet wird. Hiermit wäre die für die Simulation notwendige Mathematik eingeführt, sodass im nächsten Schritt auf die Erzeugung des turbulenten Magnetfeldes in einer Simulation und Verfolgung von Teilchen in einem solchen eingegangen werden kann.

Abbildung 2.2: Amplituden B_n aufgetragen über k . Das hier gezeigte Spektrum erstreckt sich in einem Wellenlängenbereich von $\lambda_{min} = 0.1 R$ bis $\lambda_{max} = 10 R$ mit $k_{min.,max.} = \frac{2\pi}{\lambda_{max.,min.}}$ bei einer Wellenvektoranzahl von $N_k = 200$. Verwendet wurde hierbei das Kolmogorov-Turbulenzmodell, weshalb die Steigung der Geraden in der gewählten doppelt-logarithmischen Auftragung genau $-\frac{1}{3}$ entspricht.



2.2.2 Einteilchenbewegung im turbulenten Magnetfeld

Mit diesem Wissen lässt sich jetzt eine Einteilchen-Bewegung in einem turbulenten Magnetfeld simulieren. Hierzu wird zunächst das turbulente Feld in Form der diskreten Anzahl an Wellenvektoren erzeugt und diese anschließend in ein globales Koordinatensystem transformiert. Für das nachzuverfolgende Teilchen wird das effektive Magnetfeld über Aufsummieren aller B_n am Ort des Teilchens bestimmt. Im nächsten Schritt wird in das Koordinatensystem transformiert, in welchem das effektive Magnetfeld in z-Richtung zeigt. In diesem System lässt sich die Lorentzgleichung für das Teilchen lösen und die Propagation des Teilchens bestimmen. Die Annahme dabei ist, dass das Teilchen während der Zeit Δt nicht aus dem Bereich propagiert, in welchem das effektive Magnetfeld in z-Richtung zeigt, da nur für diesen Fall die Lorentzgleichung lösbar ist. Dieser Zeitschritt ist $\Delta t = \frac{T}{200}$.

Als letzter Schritt wird die neue Teilchenposition zur Nachverfolgung ins globale Koordinatensystem transformiert.

In dieser Arbeit werden ausschließlich Protonen mit einer Energie von $1 TeV$ betrachtet. Diese werden am Ursprung $(0, 0, 0)^T$ des globalen Koordinaten eingefügt und mit einer zufällig isotrop gewürfelten Impulsrichtung versehen.

Die sich daraus ergebende Teilchenbahn kann auf großen Skalen, d.h. in Bereichen $\gg R$, als „random walk“ bezeichnet werden. Dies ist in Abbildung 2.3 und 2.4 ersichtlich. Der Unterschied zwischen beiden Abbildung ist zum einen die verschiedenen lange Verfolgungszeit und zum anderen die unterschiedliche Impulsrichtung zu Beginn.

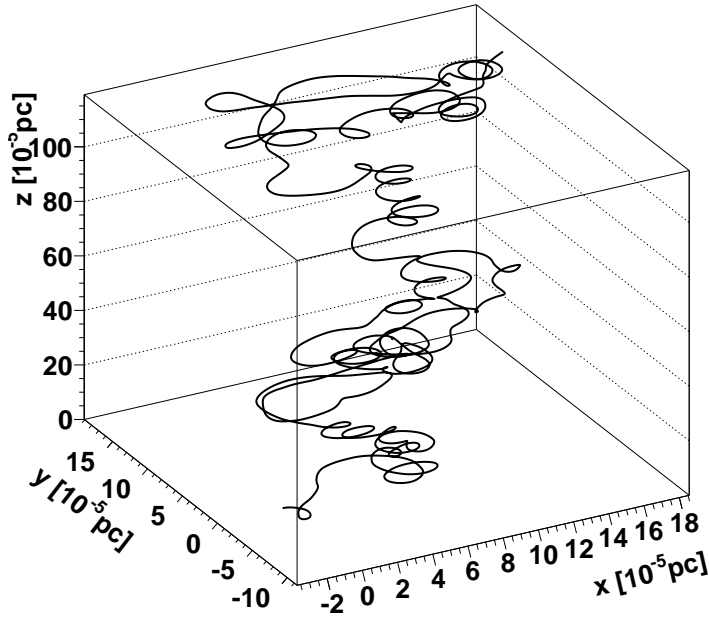


Abbildung 2.3: Verfolgung eines Protons der Energie 1 TeV durch ein simuliertes, homogenes Magnetfeld mit turbulenter Komponente. Die magnetische Flussdichte ist hierbei $B_{hom.} = B_{Turb.} = 50 \mu\text{G}$.

Die Verfolgungsdauer hierbei ist 40 T. Es liegt ein eindeutiges „random walk“-Verhalten und eine gerichtete Bewegung in z-Richtung hervorgerufen durch das homogene Hintergrundfeld vor.

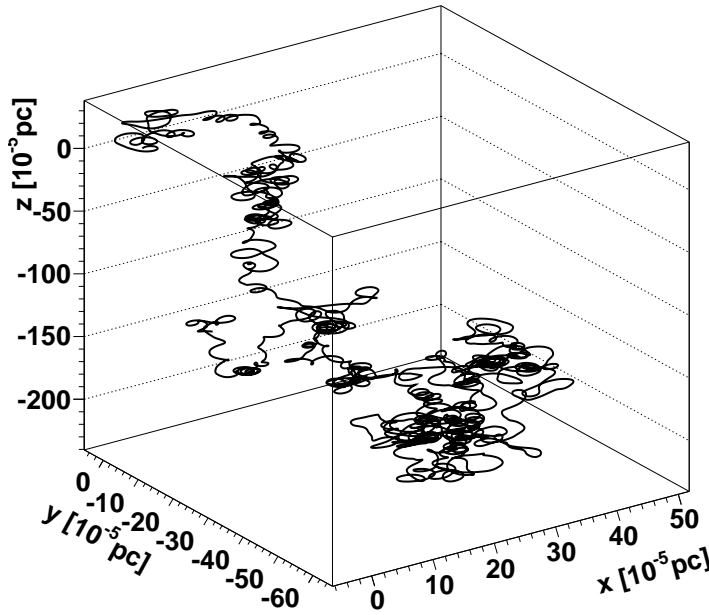


Abbildung 2.4: Verfolgung eines Protons der Energie 1 TeV durch ein simuliertes, homogenes Magnetfeld mit turbulenter Komponente. Die magnetische Flussdichte ist hierbei $B_{hom.} = B_{Turb.} = 50 \mu\text{G}$.

Die Verfolgungsdauer hierbei ist 200 T. Es liegt ein eindeutiges „random walk“-Verhalten sowie eine gerichtete Bewegung in z-Richtung hervorgerufen durch das homogene Hintergrundfeld vor.

Im Vergleich zum oberen Bild erkennt man die zufällig gewürfelte Anfangsimpulsrichtung anhand der unterschiedlichen Ausbreitungsrichtung.

2.2.3 Ensemblebewegung im turbulenten Magnetfeld

Da in dieser Arbeit jedoch die Diffusion von geladenen Teilchen in Magnetfeldern betrachtet werden soll, reicht die Verfolgung eines einzelnen Teilchens nicht aus, um Aussagen treffen zu können. Stattdessen müssen ganze Ensembles an Teilchen betrachtet werden, welche alle am gleichen Ort injiziert werden und jedes einzeln eine eigene zufällig isotrop bestimmte Start-Ausbreitungsrichtung zugeteilt bekommt. In dieser Arbeit werden jeweils Ensembles bestehend aus 1000 Teilchen betrachtet, deren Position anschließend histogrammiert wird. Interessant ist hierbei also, wie die Verteilung solcher Teilchen in jeder der drei Richtungen des globalen Koordinatensystem aussieht. Ein Beispiel ist in Abbildung 2.5 ersichtlich. Die Verfolgungsdauer beträgt hierbei 10 T.

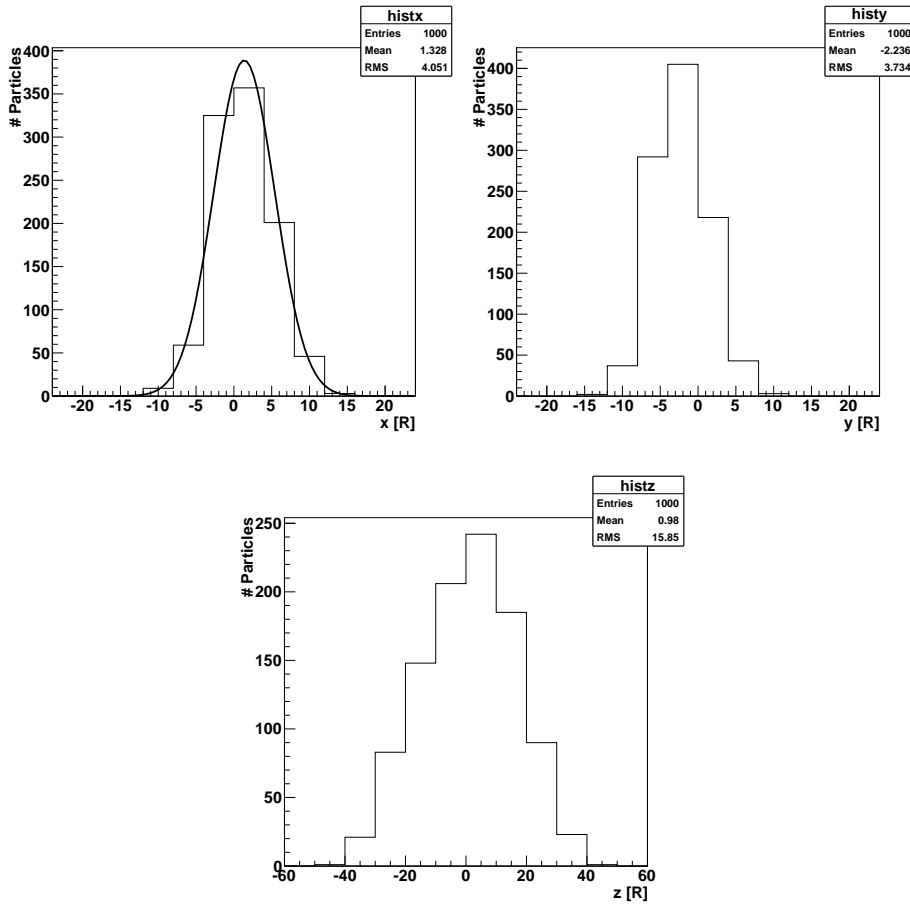


Abbildung 2.5: Verteilung der Teilchen in x-, y- und z-Richtung nach $t = 10$ T. Die schwarze Kurve in der Verteilung in x-Richtung ist ein Gauß-Fit an die Daten.

Aufgrund des „random walk“-Verhaltens, welches die einzelnen Teilchen in einer Einteilchen-Verfolgung aufweisen, erwartet man bei der Betrachtung von Teilchen-Ensembles Diffusion zu beobachten. Betrachtet man nun die klassische Diffusionsgleichung entnommen aus [1]

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}$$

mit n der Teilchenkonzentration und deren Lösung im eindimensionalen Fall

$$n(x, t) = \frac{N_p}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-x^2/4Dt} \quad (2.26)$$

lässt sich feststellen, dass bei vorliegender Diffusion theoretisch für alle drei Richtungen eine Gaußverteilung erwartet wird. Exemplarisch wurde dazu ein Gauß-Fit an die Verteilung in x-Richtung durchgeführt. Dieser erfüllt die theoretischen Erwartungen für Teilchendiffusion, weshalb angenommen werden kann, dass die Simulation tatsächlich diffuse Teilchenbewegung simuliert.

Für den Bereich, ab dem die Teilchen tatsächlich diffundieren, gilt nach der Theorie der Diffusion für die Standardabweichung

$$\sigma = \sqrt{2Dt} \quad (2.27)$$

Mit Hilfe dieser Formel lassen sich, wie später in Kapitel 3.3 beschrieben, Diffusionskoeffizienten aus unserer Simulation ableiten. Anhand der oben gezeigten Verteilungen kann man erkennen,

dass die für die Betrachtung von Teilchendiffusion interessante Messgröße eines Ensembles nicht der Mittelwert, sondern die Standardabweichung ist. Der Mittelwert wird immer einen Wert nahe 0 annehmen, während die Standardabweichung bzw. die Breite der Verteilung mit längerer Betrachtungszeit zunimmt.

Mit diesem Kapitel sind sowohl die mathematischen Grundlagen, wie auch die Methodik zum Erstellen eines homogenen Magnetfeldes mit turbulenter Komponente abgeschlossen. Im weiteren Verlauf der Arbeit wird der Einfluss unterschiedlicher Parameter auf die Simulation dargestellt und daraus gewonnene Erkenntnisse formuliert.

3. Ergebnisse der Simulationen

In diesem Teil der Arbeit werden die durchgeführten Simulationen kurz vorgestellt und die daraus folgenden Ergebnisse diskutiert. Während aller Simulationen werden Ensembles aus 1000 Protonen betrachtet, welche je eine Energie von $E = 1$ TeV besitzen. Das turbulente Magnetfeld wird mit Hilfe einer diskreten Anzahl N_k an ebenen Wellen simuliert, wobei die Wellenlängen dieser Wellen auf einer logarithmischen Skala äquidistant zwischen λ_{min} und λ_{max} gewählt werden. λ_{min} hat in jeder Simulation den selben Wert von $0.1 R$. Für jeden Durchlauf werden 50 Simulationen voneinander unabhängig durchgeführt und die daraus bestimmte Standardabweichung der Position je in x-, y- und z-Richtung anschließend gemittelt.

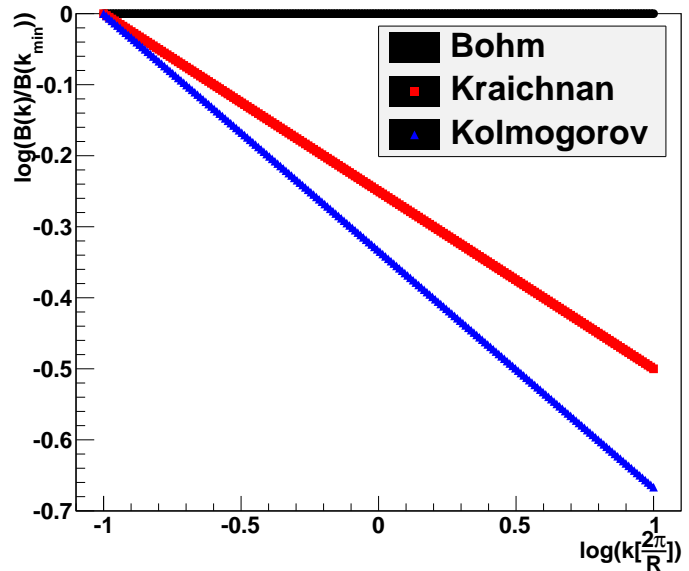
3.1 Test verschiedener Turbulenzmodelle

Wie bereits in Kapitel 2.1.2 vorgestellt können verschiedene Indices für die Verteilung der Energiedichte des turbulenten Feldes verwendet werden, wobei jeder Index einem Turbulenzmodell zugeordnet werden kann. Mit einem höheren Index erreicht man einen steileren Abfall der Energiedichte zu niedrigeren Wellenlängen bzw. größeren Wellenvektorbeträgen hin. Dies ist in Abbildung 3.1 ersichtlich.

Abbildung 3.1: Amplituden B_n des turbulenten Magnetfeldes über k für verschiedene Turbulenzindices.

Die schwarzen, waagrechten Kreise zeigen das Spektrum des turbulenten Magnetfeldes unter Verwendung der Bohm-Turbulenz, die roten Quadrate zeigen das Spektrum unter Verwendung der Kraichnan-Turbulenz und die blauen Dreiecke stellen das Spektrum unter Verwendung der Kolmogorov-Turbulenz dar.

Die Steigung der Geraden ist in der gewählten doppelt-logarithmischen Auftragung gegeben durch $\frac{-\Gamma+1}{2}$.



Dabei ist $\Gamma = 1$ bei Verwendung der Bohm-Turbulenz, $\Gamma = \frac{3}{2}$ bei Verwendung der Kraichnan-Turbulenz und $\Gamma = \frac{5}{3}$ bei Verwendung der Kolmogorov-Turbulenz.

Wie man der Abbildung entnehmen kann, unterscheiden sich die Spektren der verschiedenen Turbulenzmodelle nicht unerheblich. Aufgrund dessen könnten bei Verwendung verschiedener Turbulenzmodelle auch verschiedene Ergebnisse erwartet werden.

Im Folgenden wurde ein homogenes Magnetfeld mit einer Flussdichte von $50\mu G$ und eine turbulente Magnetfeldkomponente, welche mithilfe von 200 Wellen mit Wellenlängen im Bereich

von $0.1 - 10 R$ dargestellt wird, verwendet.

Die folgende Abbildung 3.2 zeigt jeweils die über die 50 Durchläufe gemittelte Standardabweichung in x-, y- und z-Richtung der Teilchen in Abhängigkeit der Turbulenzmodellwahl in Gyroradien doppelt-logarithmisch über die Zeit in Umlaufdauern aufgetragen.

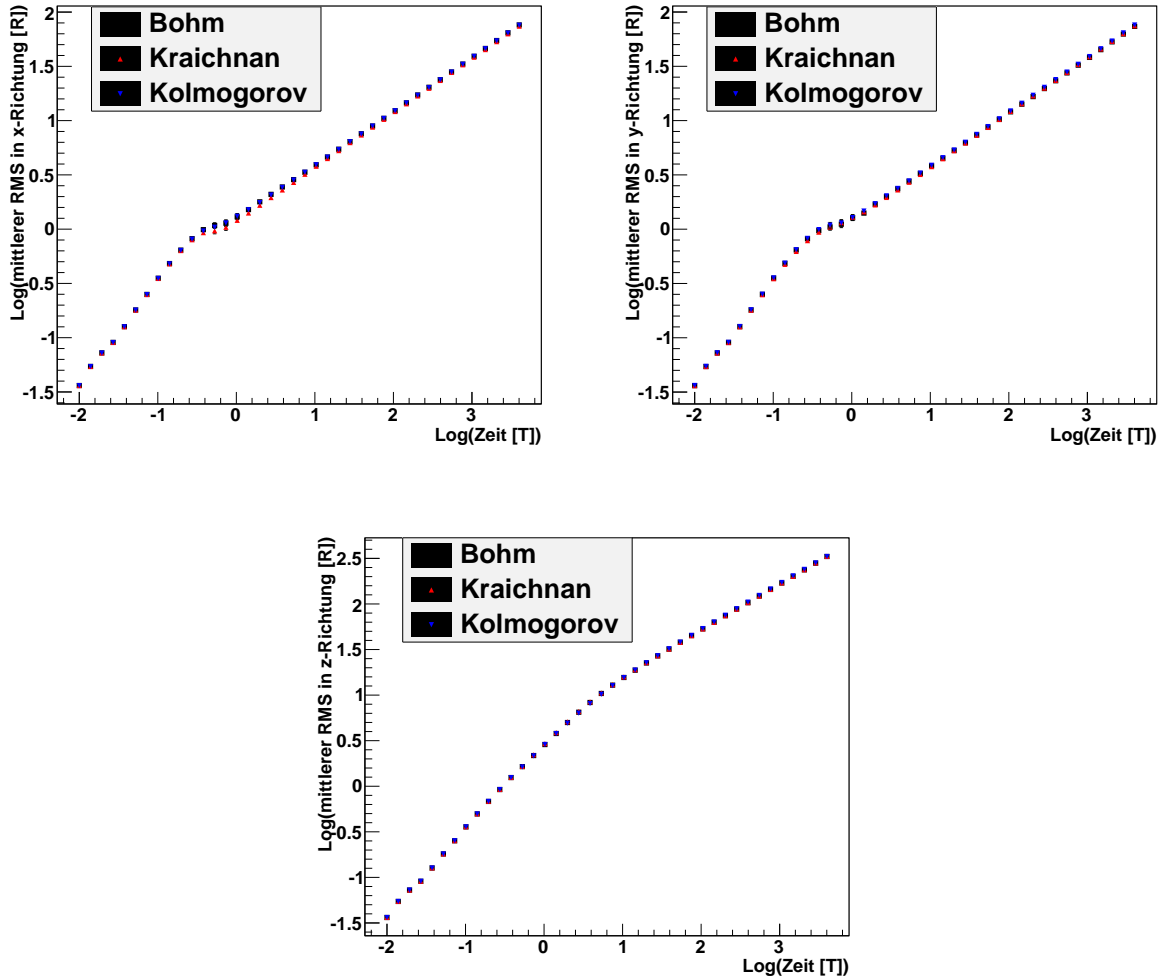


Abbildung 3.2: Über 50 Läufe gemittelte Standardabweichung der Position von 1000 Teilchen in x-, y- und z-Richtung mit Fehlerbalken.

Die Fehler erhält man aus einer Gauß'schen Fehlerfortpflanzung. Sie sind nur im Bereich um $\log(t) = 0$ erkennbar.

Die schwarzen Quadrate zeigen die gemittelte Standardabweichung unter Verwendung der Bohm-Turbulenz, die roten Dreiecke zeigen die gemittelte Standardabweichung unter Verwendung der Kraichnan-Turbulenz und die blauen, nach unten gerichteten Dreiecke zeigen die gemittelte Standardabweichung unter Verwendung der Kolmogorov-Turbulenz.

Die größte Abweichung zwischen den Turbulenzmodellen findet sich bei ca. $0.5 T$. Dort ist ebenso ein Knick erkennbar, welcher den Übergang von wahlloser Verteilung der Teilchen zur tatsächlichen Diffusion kennzeichnet.

Ansonsten stimmen alle drei Verteilungen sehr gut miteinander überein.

Was bei Betrachtung der z-Richtung allerdings auffällt, sind die um einen Faktor 3 größeren Werte der gemittelten Standardabweichung gegenüber der x- und y-Richtung, sowie der weniger stark ausgeprägte Knick beim Übergang zur Diffusion. Dies lässt sich mit dem in z-Richtung vorgegebenen, homhogenen Feld erklären, welches bereits vor einsetzender Diffusion die Teilchen in diese Richtung beschleunigt und somit eine Bewegungsrichtung vorgibt.

Man erkennt hier, dass die Teilchen zunächst wahllos in alle Richtungen verteilt werden, was dem anfänglichen, stark ansteigenden Verlauf bis zu einer Zeit von ca. $1T$ und einer zurückgeleg-

ten Strecke von ca. $1R$ entspricht. In dem kurz vorher langsam einsetzenden Diffusionsprozess erkennt man den größten Unterschied bei der Wahl verschiedener Turbulenzmodelle, die ansonsten sehr gut übereinzustimmen scheinen.

Ab einer Zeit von $t = \frac{\lambda_{max}}{c} \approx 1.59 T$, was in der gezeigten logarithmischen Skala einem Wert von $\log(t) \approx 0.202$ entspricht, diffundieren die Teilchen. Zu dieser Zeit haben die Protonen jede Wellenlänge des turbulenten Feldes mindestens ein Mal abgetastet.

Um genauer verifizieren zu können, ob tatsächlich kein signifikanter Unterschied feststellbar ist, wurde im nächsten Schritt die Differenz der mittleren Standardabweichung der Teilchenposition vom Modell mit Verwendung der Bohm-Turbulenz zum Modell, in dem die Kolmogorov-Turbulenz verwendet wurde, bzw. vom Modell mit Kraichnan-Turbulenz zum Modell mit Kolmogorov-Turbulenz und der relative Fehler auf die Standardabweichung unter Verwendung der Kolmogorov-Turbulenz über die Zeit aufgetragen.

Die Differenzen wurden folgenderweise berechnet

$$\Delta(t) = \left| \frac{\sigma_{Verteilung}(t) - \sigma_{Kolmogorov}(t)}{\sigma_{Kolmogorov}(t)} \right| \quad (3.1)$$

mit $\sigma(t)$ der Standardabweichung der Teilchenposition unter Verwendung des jeweiligen Turbulenzmodells in Abhängigkeit der Zeit und der relative Fehler wie folgt

$$\delta_{rel.}(t) = \frac{\delta_{\sigma_{Kolmogorov}}(t)}{\sigma_{Kolmogorov}(t)} \quad (3.2)$$

wobei $\delta_{\sigma_{Kolmogorov}}(t)$ die Standardabweichung der Standardabweichung der Teilchenposition bestimmt über die 50 Durchläufe in Abhängigkeit der Zeit ist.

Die jeweils mittleren relativen Fehler und Differenz-Werte bestimmt über einen linearen Fit ab einer Zeit von $t = \frac{\lambda_{max}}{c} \approx 1.59 T$ sind in Tabelle 3.1 aufgeführt.

	x-Richtung	y-Richtung	z-Richtung
relative Fehler	$8.72 \cdot 10^{-2}$	$9.12 \cdot 10^{-2}$	$4.85 \cdot 10^{-2}$
Diff. Bohm-Kolmogorov	$0.54 \cdot 10^{-2}$	$2.29 \cdot 10^{-2}$	$0.65 \cdot 10^{-2}$
Diff. Kraichnan-Kolmogorov	$1.60 \cdot 10^{-2}$	$1.15 \cdot 10^{-2}$	$0.57 \cdot 10^{-2}$

Tabelle 3.1: Mittlere relative Fehler der Standardabweichung unter Verwendung der Kolmogorov-Turbulenz und mittlere Differenzen der Standardabweichung unter Verwendung der Bohm- bzw. Kraichnan-Turbulenz zur Kolmogorov-Turbulenz angegeben relativ zum Modell mit Verwendung der Kolmogorov-Turbulenz

Anhand dieser Tabelle lässt sich ablesen, dass der relative Fehler über den relativen Differenzen liegt. Die dazugehörigen Darstellungen des relativen Fehlers bzw. der Differenzen sind in Abbildung 3.3 erkennbar.

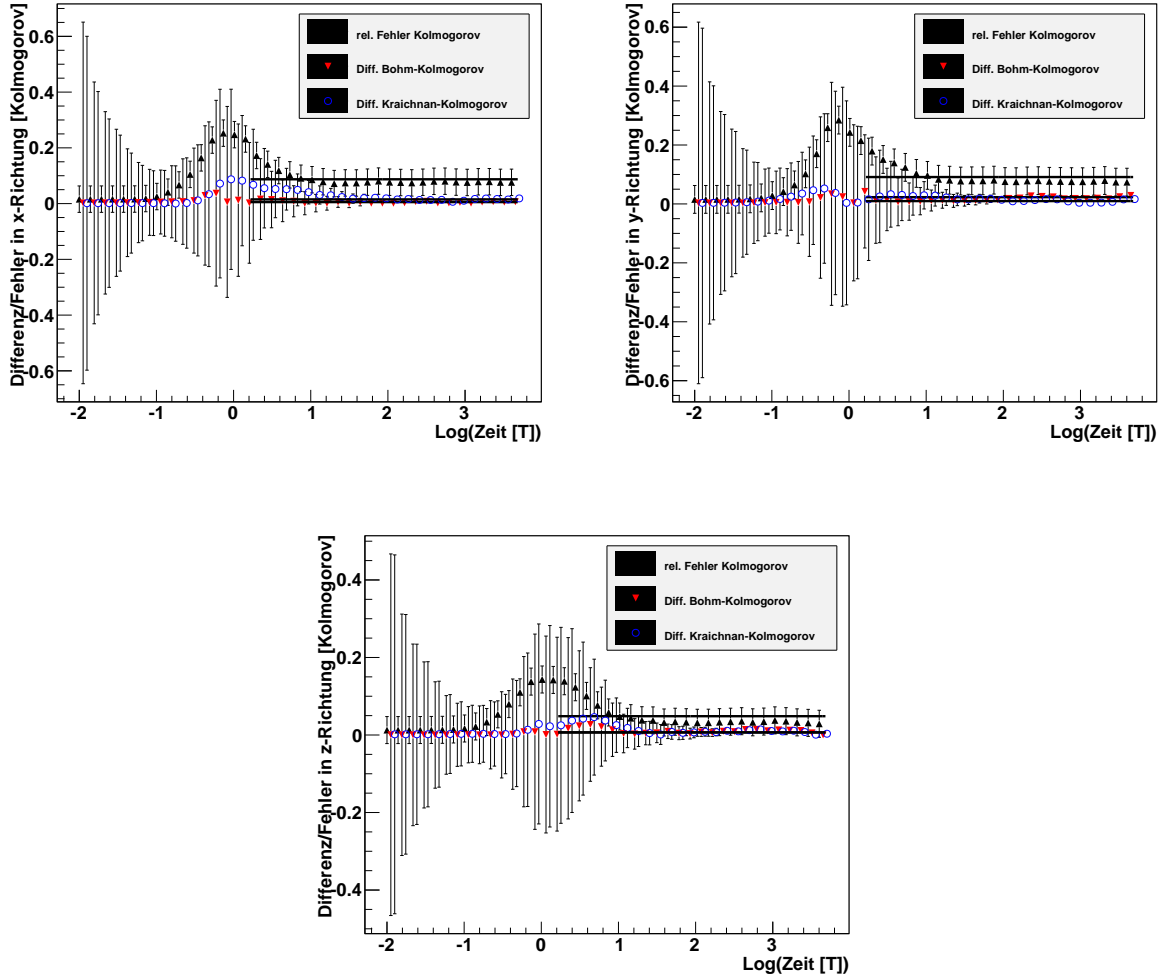


Abbildung 3.3: Relativer Fehler auf das Modell mit Verwendung der Kolmogorov-Turbulenz und Unterschiede zwischen den Modellen unter Verwendung von Bohm- und Kraichnan-Turbulenz zum Modell mit Kolmogorov-Turbulenz in x-, y- und z-Richtung. Die eingezeichneten Werte wurden alle jeweils zur selben Zeit ausgewertet und nur zur besseren Übersicht in dieser Darstellung leicht zueinander verschoben. Die Fehlerbalken an den relativen Fehlern ergeben sich über eine Abschätzung der Standardabweichung vom Mittelwert selbiger und die Fehlerbalken an den Differenzen ergeben sich aus einer Gauß'schen Fehlerfortpflanzung.

Die eingezeichneten, schwarzen Geraden sind Fits an die Werte ab dem Zeitpunkt $t = \frac{\lambda_{max}}{c} \approx 1.59 T$ bis zum höchsten, simulierten Zeitpunkt $t_{fin} = 4000 T$.

Man erkennt, dass der relative Fehler stets über den relativen Differenzen liegt. Allerdings sind die relativen Fehler und Differenzen in z-Richtung im Vergleich zu x- und y-Richtung wesentlich kleiner, was wiederum auf das vorgegebene, homogene Magnetfeld zurückführbar ist.

Für alle drei Richtungen erkennt man, dass die Differenzen stets unter dem relativen Fehler bei Verwendung der Kolmogorov-Turbulenz liegen. Dies und die Ergebnisse aus Tabelle 3.1 erlauben es, eine Aussage über den Einfluss der Wahl eines Turbulenzmodells auf die Ergebnisse der Simulation zu treffen.

Da die gemittelte Standardabweichung der Position unter Verwendung der Kolmogorov-Turbulenz einen größeren Fehler aufzeigen, als die Unterschiede zu Modellen mit Verwendung von Bohm- oder Kraichnan-Turbulenz, also stärker schwanken, als diese sich unterscheiden, sind für die Simulation keine signifikanten Unterschiede zu erwarten.

Alle nachfolgenden Simulationen werden unter Verwendung der Kolmogorov-Turbulenz betrachtet.

3.2 Variation der maximalen Magnetfeldwellenlänge

Dieses Kapitel befasst sich mit der Variation des turbulenten Magnetfeldes. Im Gegensatz zum vorherigen bleibt hierbei allerdings das Turbulenzmodell konstant. Es wird nur die Kolmogorov-Turbulenz verwendet. Die in diesem Kapitel betrachteten Parameter sind zum einen die maximale Wellenlänge λ_{max} des turbulenten Feldes und zum anderen die Wellenvektoranzahl N_k , welche bisher standardmäßig einen Wert von 200 hatte.

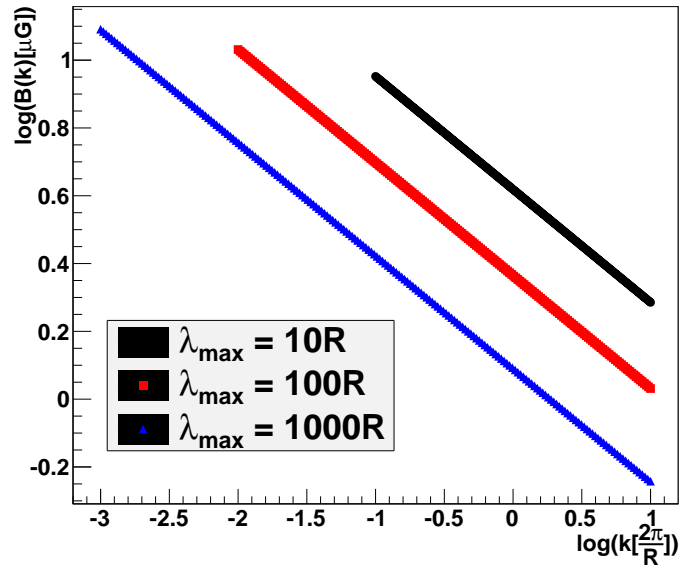
Zunächst soll nur der Einfluss der maximalen Wellenlänge des turbulenten Feldes auf die Simulation untersucht werden, weshalb $N_k = 200$ vorerst konstant gewählt wird. Auf eine Variation von λ_{min} wird in dieser Arbeit verzichtet, da bereits in [3] gezeigt wurde, dass bei Variation der minimalen Magnetfeldwellenlänge keine signifikanten Unterschiede zu erwarten sind. Das Spektrum eines turbulenten Feldes mit $50 \mu\text{G}$, $\lambda_{max} = 10 \text{ R}$ und $N_k = 200$ ist bereits in Abbildung 2.2 in Kapitel 2.2.1 zu erkennen. Nun soll die maximale Wellenlänge λ_{max} auch für die Werte 100 R und 1000 R betrachtet werden.

Das Spektrum der Felder sieht dann wie in Abbildung 3.4 ersichtlich aus.

Abbildung 3.4: Amplituden B_n aufgetragen über k .

Die schwarze Kurve stellt das Spektrum mit einer maximalen Wellenlänge von 10 R dar, die rote Kurve jenes mit einer maximalen Wellenlänge 100 R und die blaue Kurve das Spektrum mit einer maximalen Wellenlänge von 1000 R.

Die Amplitude des Feldes $B_{k_{max}}$ mit $k_{max} = \frac{2\pi}{\lambda_{min}}$ verkleinert sich mit steigender maximaler Wellenlänge.



Man erkennt in Abbildung 3.4, dass die Amplituden aller Wellen entlang der x-Achse in negative Richtung verschoben werden, also den einzelnen Wellen eine geringere Amplitude zugeordnet wird, bzw. das turbulente Magnetfeld mit einem breiteren Spektrum an Wellenlängen dargestellt wird.

Welche Auswirkungen das auf die Simulation hat, ist in Abbildung 3.5 ersichtlich.

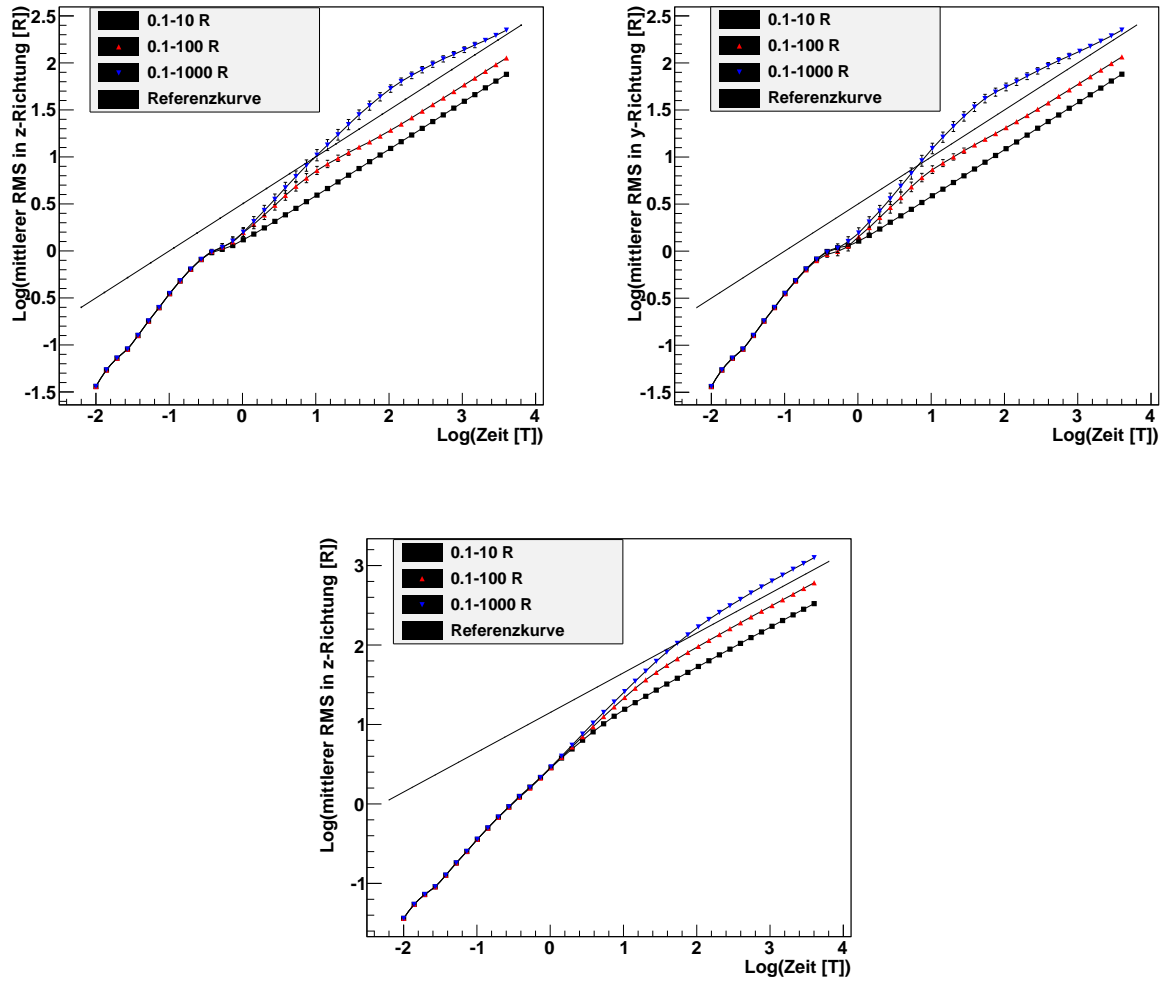


Abbildung 3.5: Vergleich der mittleren Standardabweichung aus 50 Durchläufen mit jeweils $N_k = 200$ in x-, y- und z-Richtung mit Fehlerbalken. Die Fehler ergeben sich über eine Gauß'sche Fehlerfortpflanzung. Man erkennt deutlich die jeweils später einsetzende Diffusion. Diffusion liegt dann vor, wenn die Steigung in dieser Auftragung $\approx \frac{1}{2}$ ist. Für die höchste, gewählte maximale Wellenlänge ist dieser Bereich schwer erkennbar.

Zur Referenz wurde eine Gerade mit Steigung $\frac{1}{2}$ eingezeichnet.

Man erkennt, dass die Diffusion mit steigender maximaler Wellenlänge immer später einsetzt. Der Grund dafür ist, dass die Teilchen einen weiteren Weg, nämlich den der maximalen Wellenlänge, zurücklegen müssen, um eine Wechselwirkung mit dem gesamten turbulenten Feld zu erfahren. Die Wahl von λ_{max} hat also einen großen Einfluss auf die Simulation.

Der zweite Punkt, welcher in diesem Abschnitt überprüft werden soll, ist, welche Auswirkung eine Änderung der Wellenvektoranzahl N_k auf die Simulation hat. Dies zu überprüfen ist notwendig, da das Magnetfeld mithilfe einer diskreten Anzahl an Wellenvektoren beschrieben wird, was bei einer Vergrößerung von λ_{max} einer Verteilung der Energiedichte des turbulenten Feldes über einen größeren Bereich bedeutet. Dies könnte zur Folge haben, dass das turbulente Feld nicht ausreichend gut beschrieben werden kann. Hierzu wurden für $\lambda_{max} = 100 \text{ R}$ und $\lambda_{max} = 1000 \text{ R}$ jeweils 50 Durchläufe mit $N_k = 200$ und $N_k = 300$ durchgeführt und anschließend verglichen. Folgende Abbildungen 3.6 zeigt die Ergebnisse für eine maximale Wellenlänge von $\lambda_{max} = 100 \text{ R}$ bzw. $= 1000 \text{ R}$.

Es scheinen die Abweichung von Werten bei beiden λ_{max} , bei denen das Magnetfeld mit 200 Wellenvektoren erzeugt wurde, zu denen mit $N_k = 300$ stets innerhalb der Fehlergrenzen zu liegen.

Dies lässt sich mit Abbildung 3.7 zeigen, bei der der relative Fehler auf die Standardabweichung bei Beschreibung des Magnetfeldes durch $N_k = 200$ Wellenvektoren und die relative Differenz zwischen der Standardabweichung bei Beschreibung des Magnetfeldes durch 200 und jener bei Beschreibung des Magnetfeldes durch 300 Wellenvektoren über die Zeit aufgetragen sind. Die relativen Fehler und Differenzen wurden hierbei analog zu denen aus Gleichungen (3.1) und (3.2) folgenderweise berechnet.

$$\delta_{rel.}(t) = \frac{\delta_{\sigma_{200k}}(t)}{\sigma_{200k}(t)} \quad (3.3)$$

$$\Delta(t) = \left| \frac{\sigma_{300k}(t) - \sigma_{200k}(t)}{\sigma_{200k}(t)} \right| \quad (3.4)$$

mit $\sigma_k(t)$ der Standardabweichung bei Verwendung von 200 bzw. 300 Wellenvektoren zur Beschreibung des turbulenten Magnetfeldes und $\delta_{\sigma_{200k}}(t)$ der Standardabweichung der Standardabweichung der Teilchenposition bestimmt über die 50 Durchläufe in Abhängigkeit der Zeit.

Die Erkenntnisse dieses Abschnitts lassen sich folgendermaßen zusammenfassen.

Die Wahl der maximalen Wellenlänge des turbulenten Magnetfeldes λ_{max} hat wie erwartet eine große Auswirkung auf die Diffusion der Teilchen. Die Energiedichte des turbulenten Feldes wird über einen größeren Bereich verteilt, dementsprechend koppeln die Teilchen schwächer an das Magnetfeld und weisen erst später ein diffuses Verhalten auf.

Die Wahl der Anzahl der Wellenvektoren dagegen beeinflusst die Simulation nicht sehr stark, weshalb auf eine größere Anzahl an Wellenvektoren und somit größere Rechenzeit verzichtet werden kann. Im Folgenden wird daher nur noch mit $N_k = 200$ gerechnet.

Dass eine sehr viel größere Anzahl an Wellenvektoren einen Unterschied für die Simulation bedeuten könnte, ist hiermit nicht ausgeschlossen. Im Rahmen dieser Arbeit wurde eine solche Untersuchung nicht angestellt.

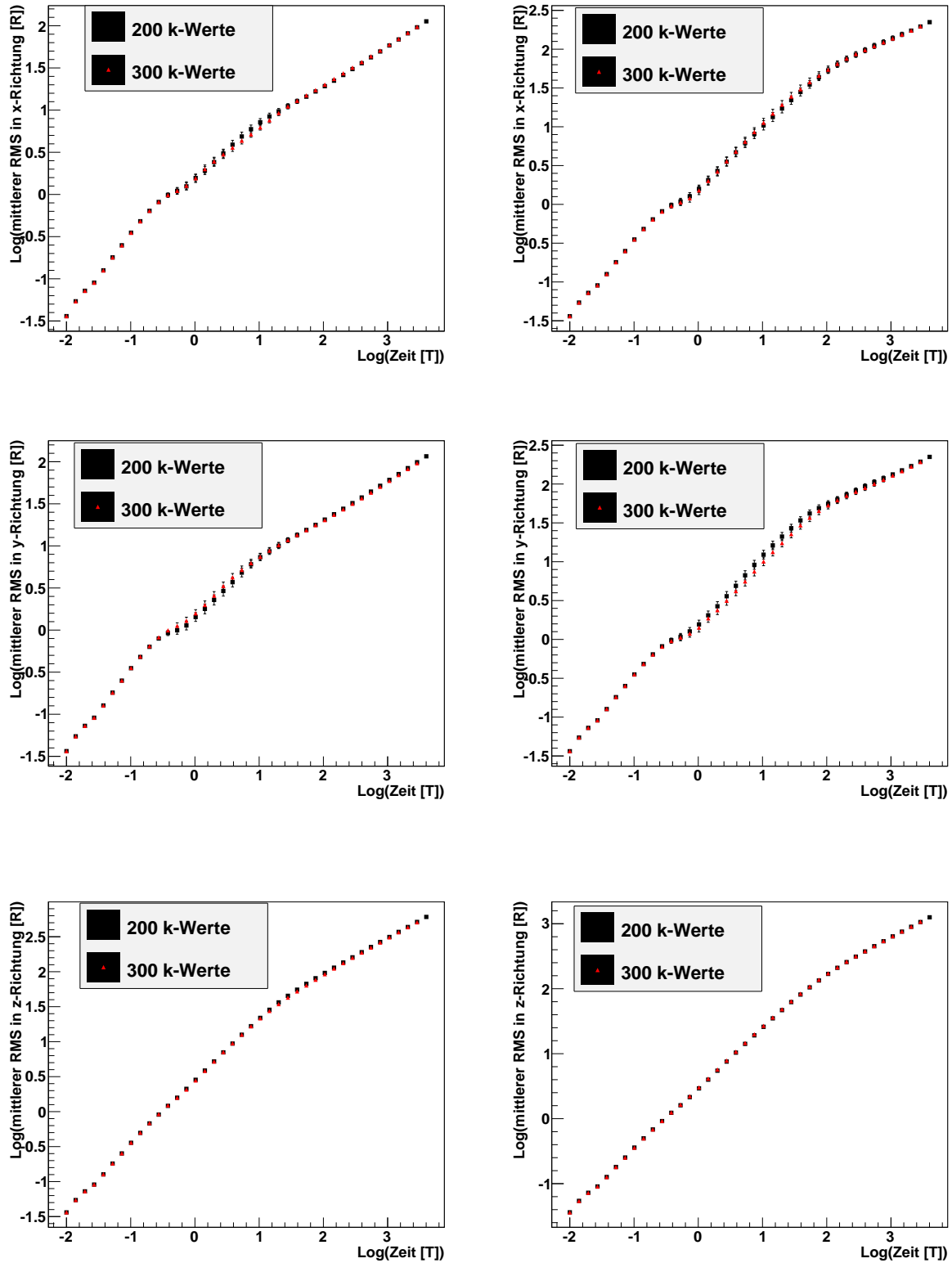


Abbildung 3.6: Mittlere Standardabweichung in x-, y- und z-Richtung über Zeit für $\lambda_{max} = 100 \text{ R}$ auf der linken, und für $\lambda_{max} = 1000 \text{ R}$ auf der rechten Seite mit Fehlerbalken. Die Fehler ergeben sich über eine Gauß'sche Fehlerfortpflanzung.

Die schwarzen Quadrate sind Messpunkte unter Verwendung von $N_k = 200$. Die roten Dreiecke sind Messpunkte unter Verwendung von $N_k = 300$.

Unter Verwendung von 300 Wellenvektoren überschreitet die Rechenzeit die eingestellte maximale Rechenzeit von 23 h, weshalb hier bei 4000 T kein Punkt mehr eingezeichnet ist.

Die Abweichung von Messpunkten mit einem turbulenten Feld beschrieben durch 200 Wellenvektoren von denen mit einem Feld beschrieben durch 300 Wellenvektoren liegt stets innerhalb der 1σ -Fehlergrenzen, welche durch eine Gauß'sche Fehlerfortpflanzung bestimmt wurden.

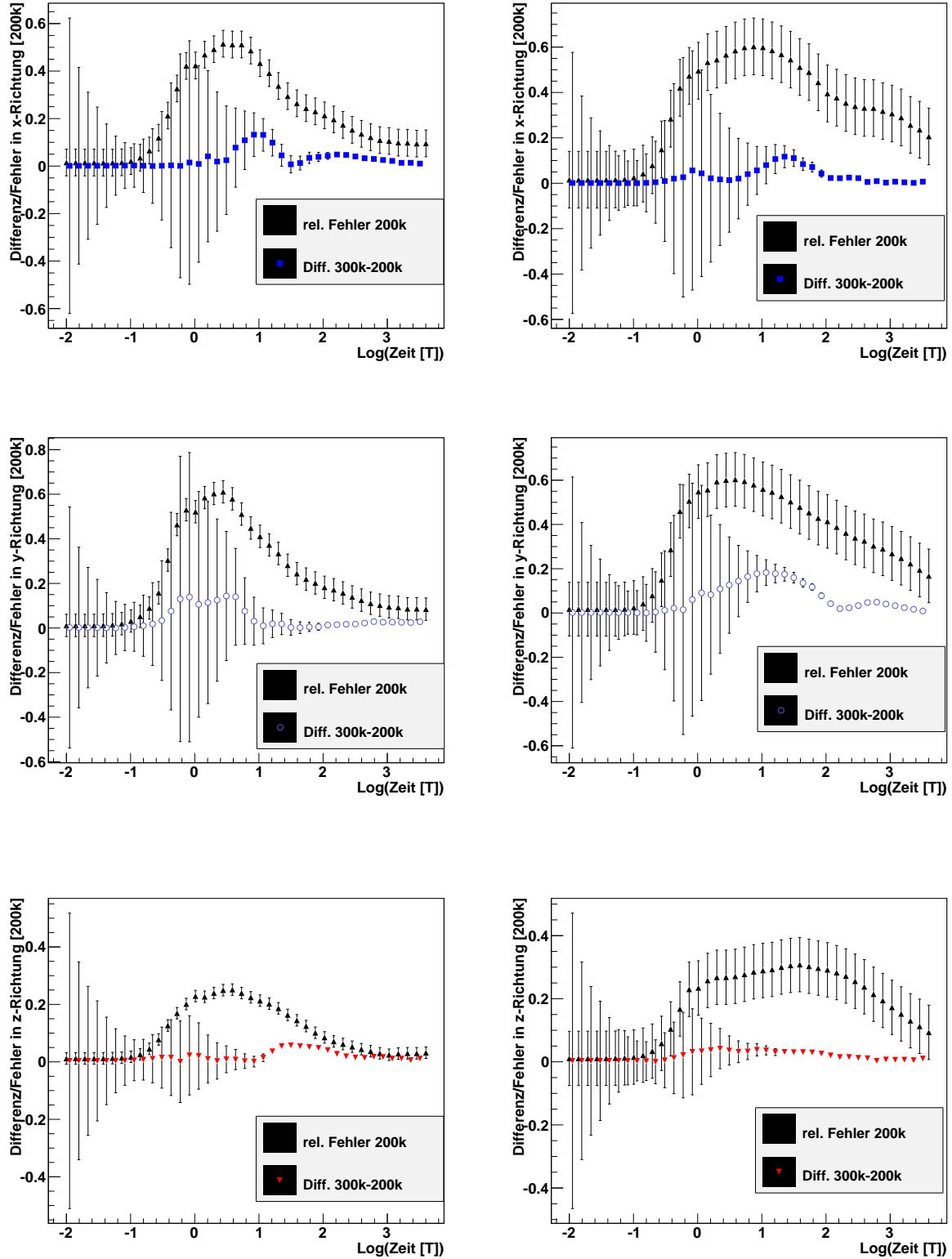


Abbildung 3.7: Relativer Fehler bzw. Differenz in x-, y- und z-Richtung aufgetragen über die Zeit bei $\lambda_{max} = 100$ R auf der linken, und bei $\lambda_{max} = 1000$ R auf der rechten Seite.

Die schwarzen Dreiecke sind die relativen Fehler, während die blauen Quadrate die relative Differenz darstellen.

Man erkennt, dass der relative Fehler stets über der relativen Differenz liegt, weshalb auch für $\lambda_{max} = 100$ R bzw. $= 1000$ R an $N_k = 200$ festgehalten werden kann, ohne die Simulation nennenswert zu beeinträchtigen.

3.3 Ableitung von Diffusionskoeffizienten

Dieser Abschnitt der Arbeit befasst sich mit dem Einfluss der maximalen Wellenlänge des turbulenten Magnetfeldes auf aus der Simulation abgeleitete Diffusionskoeffizienten. Für diesen Abschnitt wurden bereits die Erkenntnisse der vorhergehenden Abschnitte berücksichtigt, weshalb hier ausschließlich Daten verwendet wurden, welche bei Verwendung der Kolmogorov-Turbulenz mit einer Wellenvektoranzahl von $N_k = 200$ gewonnen wurden.

Wie bereits in Kapitel 2.2.3 angesprochen, lassen sich die Verteilungen der Teilchen mithilfe der Lösung der klassischen Diffusionsgleichung beschreiben. Dieser kann man entnehmen, dass die Standardabweichung σ für den Fall der Diffusion zeitabhängig ist, wie in Gleichung (2.27) beschrieben. Da die betrachtete Messgröße bei jeder Simulation die Standardabweichung in Abhängigkeit der Zeit ist, lässt sich für jede Wahl von λ_{max} ein konstanter Diffusionskoeffizient über einen Fit in jede Richtung bestimmen.

Dazu wird für jede Wahl der maximalen Magnetfeldwellenlänge der theoretisch erwartete Verlauf der Standardabweichung an die simulierten Daten gefittet. Zur besseren Übersicht wurden alle Abbildungen bisher mit einer logarithmischen Skala versehen. Um nun einen Fit auf Messdaten unter Verwendung einer logarithmischen Skala anwenden zu können, kann die Gleichung (2.27) umgeschrieben werden. Die verwendete Fit-Funktion hatte anschließend die Form

$$f(t) = \frac{1}{2}[\log(2) + \log(D) + \log(t)]$$

Unter Annahme der Gültigkeit von (2.27) ist der einzige freie Parameter hierbei $\log(D)$, da die Steigung mit 0.5 und der konstante Offset $\log(2)$ bereits bekannt sind.

Wichtig hierbei ist nun jedoch, den Bereich tatsächlicher Diffusion zu betrachten, da erst dort eine charakteristische Steigung von 0.5 auftritt. Aus diesem Grund wurde erst ab einer Zeit von $t_{Fit} = \frac{\lambda_{max}}{c}$ an die Daten gefittet. Ein exemplarisches Beispiel für einen solchen Fit ist noch einmal in Abbildung 3.8 zu erkennen.

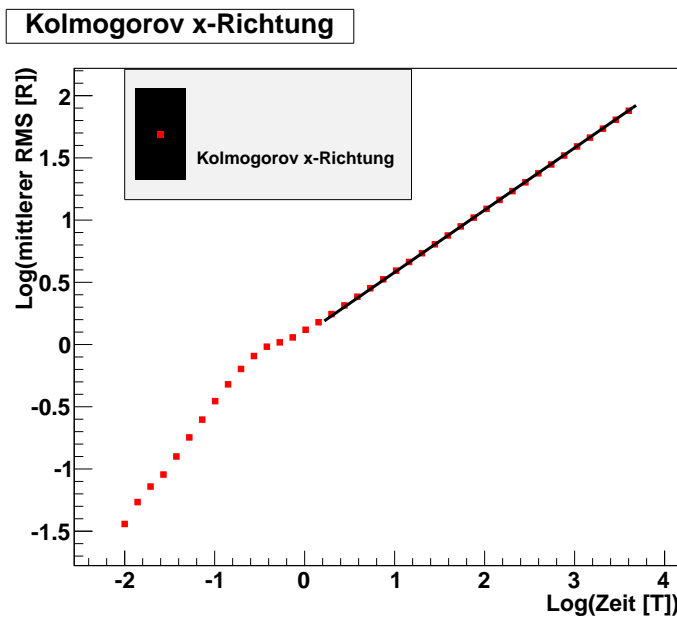


Abbildung 3.8: Fit einer Geraden mit Steigung $\frac{1}{2}$ an die simulierten Messdaten in x-Richtung.

Hierbei handelt es sich um Daten, welche unter Verwendung der Kolmogorov-Turbulenz mit einer maximalen Wellenlänge von $\lambda_{max} = 10R$ simuliert wurden.

Um der Frage nach der Abhängigkeit der Diffusionskoeffizienten von λ_{max} nachzugehen wurden diese Koeffizienten aus Simulationen mit verschiedener maximaler Wellenlänge mit einem Fit, wie in Abbildung 3.8 zu erkennen, abgeleitet und das Ergebnis in jede Richtung über die maximale Magnetfeldwellenlänge aufgetragen, wie in Abbildung 3.9 ersichtlich.

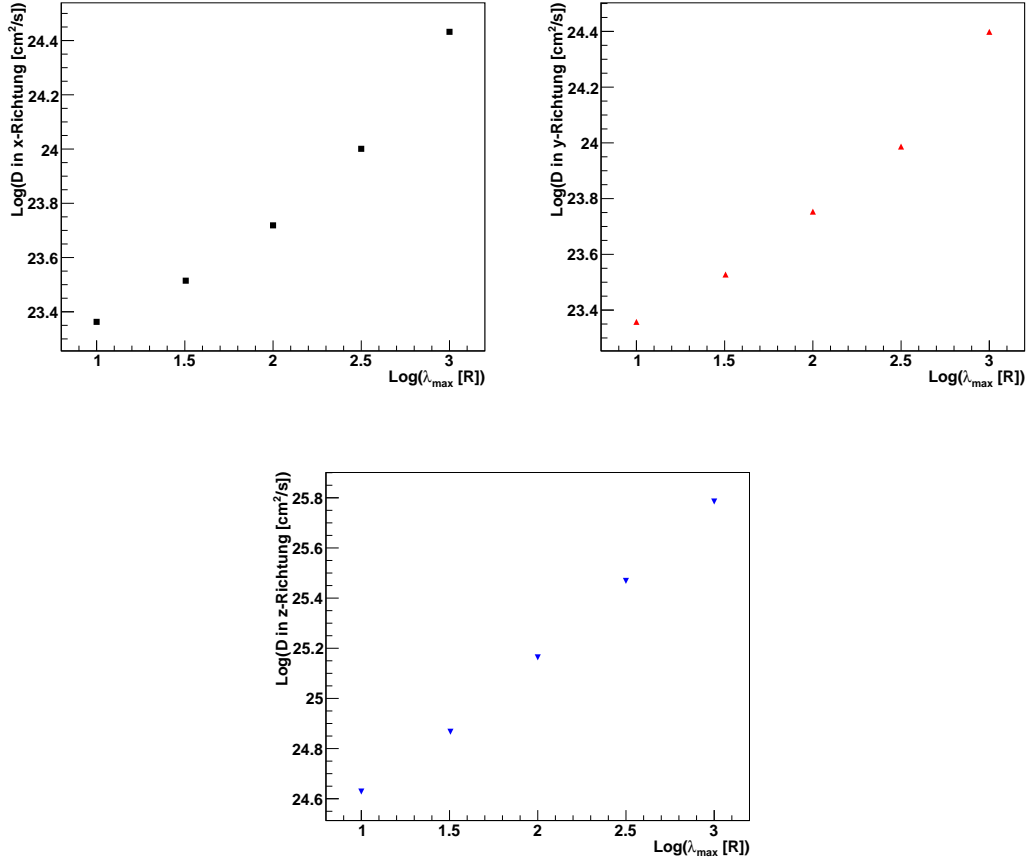


Abbildung 3.9: Diffusionskoeffizienten über maximale Wellenlänge des turbulenten Magnetfeldes in x-, y- und z-Richtung.

Eine Abhängigkeit von einem Potenzgesetz ist somit sehr unwahrscheinlich. Andere funktionale Abhängigkeiten konnten nicht genauer bestimmt werden.

Bei Erhöhung der maximalen Magnetfeldwellenlänge um zwei Größenordnungen steigt der Diffusionskoeffizient in x- und y-Richtung um ca. eine Größenordnung an. In z-Richtung steigt der Diffusionskoeffizient bei Erhöhung von λ_{max} um zwei Größenordnungen um mehr als eine Größenordnung an.

Eine Abhängigkeit von einer Potenz der maximalen Wellenlänge in der Form $\propto (\lambda_{\text{max}})^\gamma$ ist hiermit sehr unwahrscheinlich. Abhängigkeiten anderer Art und Weise bleiben möglich, konnten aber im Umfang dieser Arbeit nicht näher betrachtet werden.

Es bleibt also festzuhalten, dass aus unseren Simulationen Diffusionskoeffizienten durch Fits an die gemittelte Standardabweichung abgeleitet werden können, jedoch kann kein Abhängigkeitsgesetz zwischen maximaler Wellenlänge des turbulenten Feldes und Diffusionskoeffizienten gefunden werden.

3.4 Vergleich zu vorherigen Arbeiten

Um die Vorgehensweise und Ergebnisse einer wissenschaftlichen Arbeit verifizieren zu können, ist es von großer Bedeutung einen Vergleich mit vorherigen Arbeiten anzustellen. In diesem Abschnitt soll ein solcher Vergleich zwischen Ergebnissen der für diese Arbeit durchgeführten Simulationen und denen von Fatuzzo et al. aus [3] angestellt werden.

In dieser Arbeit wurde ebenso wie hier die Propagation von Protonensembles mit Energie

$E = 1$ TeV in turbulenten Magnetfeldern betrachtet, dabei jedoch nur ein solches Ensemble pro Parametereinstellung simuliert. Die betrachteten Magnetfelder dabei waren ein rein turbulentes Magnetfeld, und wie bei unseren Simulationen, ein homogenes Magnetfeld mit turbulenter Magnetfeldkomponente. Der verwendete mathematische Formalismus zur Simulation eines turbulenten Magnetfeldes entsprach dem von uns gewählten. Die Energiedichte des turbulenten Feldes entsprach, wie bei uns, der des homogenen Feldes, hatte allerdings einen Wert von $10 \mu\text{G}$. Wie in Abschnitt 3.1 und 3.2 hier, haben Fatuzzo et al. die Auswirkung der Wahl verschiedener Turbulenzmodelle und verschiedener Wellenlängenbereiche zur Beschreibung des turbulenten Feldes auf die Simulation untersucht, dabei aber auch λ_{min} variiert. Daher deckt sich nur eine Simulation mit dem von uns gewählten Wellenlängenbereich. Das von Fatuzzo et al. verwendete Turbulenzmodell war dabei die Kraichnan-Turbulenz und das Teilchenensemble bestand aus 200 Protonen.

Zum Vergleich wurden mithilfe des Datenauswertungsprogrammes PlotDigitizer simulierte Messdaten in x- und z-Richtung entnommen.

Der einzige übereinstimmende Wellenlängenbereich des turbulenten Magnetfeldes war hierbei $[0.1 R; 1000 R]$. Mit den selben Einstellungen für das Magnetfeld, die Teilchenenergie und den Wellenlängenbereich wurden mit unserer Software 50 Ensembles bestehend aus 1000 Teilchen simuliert, und deren gemittelte Standardabweichung anschließend bestimmt. In Abbildung 3.10 sind sowohl die von uns simulierten Daten, als auch die von Fatuzzo et al. zu erkennen.

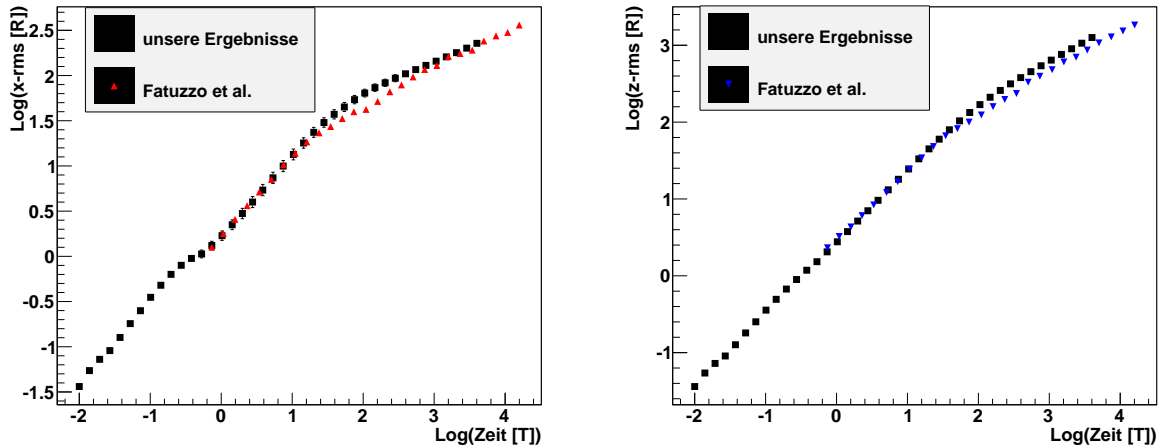


Abbildung 3.10: Vergleich unserer Daten zu denen von Fatuzzo et al. in x- und z-Richtung.

Zunächst herrscht eine gute Übereinstimmung, im Bereich von $2T$ weichen die Daten allerdings stark voneinander ab.

Im physikalisch relevanten Bereich der Diffusion stimmen sie in x-Richtung wieder gut überein, in z-Richtung liegen die von uns simulierten Daten stets über denen von Fatuzzo et al..

Zumindest in x-Richtung stimmen unsere simulierten Daten mit denen aus [3] im physikalisch relevanten Bereich der Diffusion gut überein. Die weniger gute Übereinstimmung in z-Richtung kann auf mögliche Unterschiede in der Art der Simulation oder statistische Schwankungen, da nur ein Durchlauf mit 200 Teilchen betrachtet wurde, zurückgeführt werden.

Alles in allem entsprechen unsere Werte gut denen der vorangegangenen Arbeit.

4. Fazit

In diesem letzten Kapitel der Arbeit soll noch einmal ein kurzer Überblick über die untersuchten Parameter geliefert und die hierbei gewonnenen Erkenntnisse dargestellt werden.

Zur Untersuchung der Parameter wurden jeweils 1000 Protonen mit Energie $E = 1$ TeV, versehen mit einer zufälligen Impulsrichtung, in ein homogenes Magnetfeld mit gleich starker, turbulenter Komponente mit einer Flussdichte von $B_0 = 50 \mu\text{G}$ injiziert, und über eine Zeit von 4000 T verfolgt. Zu je einem Parameterset wurden 50 solcher Simulationen durchgeführt. Das turbulente Magnetfeld wurde mit Hilfe einer diskreten Anzahl N_k an ebenen Wellen beschrieben, deren Wellenlängen aus einem vorher festgelegten Intervall auf einer logarithmischen Skala äquidistant gewählt wurden.

Die erste Analyse befasste sich mit dem Einfluss der Wahl des Turbulenzmodells zur Beschreibung des turbulenten Magnetfeldes auf die Simulation. Abhängig von der Wahl des Turbulenzmodells wird ein anderer Index Γ verwendet, mit welchem das turbulente Feld skaliert. Trotz unterschiedlicher Indices ergibt sich bei der Wahl von Bohm-, Kraichnan- oder Kolmogorov-Turbulenz kein signifikanter Unterschied für die betrachtete gemittelte Standardabweichung. Aus diesem Grund ist es ausreichend die Simulation unter Verwendung eines Turbulenzmodells auszuführen, in diesem Fall der Kolmogorov-Turbulenz.

Die zweite Analyse untersuchte den Einfluss der maximalen Wellenlänge des turbulenten Feldes und der Anzahl der das turbulente Magnetfeld beschreibenden ebenen Wellen auf die Simulation. Die das Magnetfeld beschreibenden ebenen Wellen werden zwischen einer maximalen und minimalen Wellenlänge gewählt. Der Einfluss der minimalen Wellenlänge ist nach [3] nicht signifikant, weshalb nur λ_{max} zwischen 10 R und 1000 R variiert wurde. Es stellt sich heraus, dass die Wahl von λ_{max} einen sehr großen Einfluss auf die Simulation hat und mit steigender maximaler Wellenlänge das diffuse Verhalten der Teilchen erst später einsetzt. Physikalisch lässt sich dies damit begründen, dass das Teilchen zunächst alle Wellenlängen abgetastet haben muss, um die Wechselwirkung des gesamten turbulenten Feldes zu erfahren. Im zweiten Teil dieser Analyse wurde die Anzahl an ebenen Wellen von $N_k = 200$ auf $N_k = 300$ erhöht und der Unterschied zwischen beiden Simulationen betrachtet. Dieser war nicht signifikant, weshalb das turbulente Feld weiterhin mit Hilfe von 200 ebenen Wellen beschrieben wurde.

Wie bereits gezeigt, hatte die Variation der maximalen Magnetfeldwellenlänge einen großen Einfluss auf die Simulation. Aus dieser lassen sich aufgrund der Möglichkeit, die Teilchenverteilung durch die gelöste Diffusionsgleichung beschreiben zu können, Diffusionskoeffizienten durch Fits ableiten. In dieser Analyse wurde der Einfluss der Wahl der maximalen Wellenlänge auf die abgeleiteten Diffusionskoeffizienten betrachtet. Als Ergebnis stellte sich heraus, dass eine Abhängigkeit von einem Potenzgesetz sehr unwahrscheinlich ist. Ebenso konnte keine andere funktionale Abhängigkeit gefunden werden. Anzumerken bleibt, dass der Diffusionskoeffizient bei Erhöhen der maximalen Magnetfeldwellenlänge um zwei Größenordnungen um in etwa eine Größenordnung ansteigt.

Zuletzt wurde ein Vergleich zur Arbeit von Fatuzzo et al. gezogen. Hierzu wurde eine Simulation mit denselben Einstellungen für die magnetische Flussdichte $B = 10 \mu\text{G}$, den Wellenlängenbereich des turbulenten Feldes $[0.1 \text{ R}; 1000 \text{ R}]$ und die Teilchenenergie $E = 1$ TeV wie in [3]

angestellt. In weiten Teilen stimmen beide Simulationen gut überein. Allerdings weichen die Simulationen in x-Richtung zu einer Zeit von $t \approx 2T$ voneinander ab, bevor sie sich wieder decken, während in z-Richtung die von uns simulierten Werte ab diesem Zeitpunkt stets über denen von Fatuzzo et al. liegen. Grund hierfür könnten Unterschiede in der Art der Simulation oder statistische Schwankungen zurückgeführt werden, da auf letztere in [3] nicht eingegangen wurde.

Während dieser Arbeit wurden einige Parameter und deren Auswirkung auf die Simulation untersucht. Die meisten Parameter zeigten keine signifikante Änderung der simulierten Daten. Der einzige Parameter, der in dieser Arbeit untersucht wurde, und einen sehr großen Einfluss auf die Simulation hat, ist die maximale Wellenlänge der das turbulente Feld beschreibenden Wellen. Daher sollten zukünftige Simulationen unter Verwendung verschiedener maximaler Magnetfeldwellenlängen angestellt werden.

Die Frage nach dem Einfluss einer viel größeren Anzahl an das turbulente Feld beschreibenden ebenen Wellen oder nach einer funktionalen Abhängigkeit der abgeleiteten Diffusionskoeffizienten von dieser Wellenlänge ist weiterhin offen. Dies ist jedoch nicht mehr Teil dieser Arbeit, und kann in Zukunft untersucht werden.

5. Anhang

Zu Kapitel 2.2.1 *Modellierung des turbulenten Magnetfelds*

Der Exponent $\frac{-\Gamma+1}{2}$ kann durch folgende Rechnung hergeleitet werden. Als Ansatz wählen wir hierfür, dass die Energiedichte jedes einzelnen Wellenvektors mithilfe von

$$\omega(k) = \alpha \cdot k^{-\Gamma}$$

beschrieben werden kann.

Die gesamte Energiedichte des turbulenten Feldes ergibt sich dann über Integration über alle Wellenvektoren folgenderweise.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E} &= \int_{k_{min}}^{k_{max}} \alpha \cdot k^{-\Gamma} dk \quad \text{und mit } y = \log(k) \text{ folgt} \\
 \mathcal{E} &= \int_{\log(k_{min})}^{\log(k_{max})} \alpha \cdot k^{-\Gamma} \cdot k \cdot \ln(10) dy \\
 &= \int_{\log(k_{min})}^{\log(k_{max})} \alpha \cdot k^{-\Gamma+1} \cdot \ln(10) dy \\
 &\approx \sum_{n=1}^{N_k} \alpha \cdot k_n^{-\Gamma+1} \cdot \ln(10) \Delta y \\
 &= \alpha \cdot \ln(10) \cdot \Delta y \cdot \sum_{n=1}^{N_k} k_n^{-\Gamma+1} \\
 &= \alpha \cdot \ln(10) \cdot \Delta y \cdot \frac{1}{k_{min}^{-\Gamma+1}} \cdot \sum_{n=1}^{N_k} \left(\frac{k_n}{k_{min}}\right)^{-\Gamma+1} \\
 &=: B_{min}^2 \sum_{n=1}^{N_k} \left(\frac{k_n}{k_{min}}\right)^{-\Gamma+1}
 \end{aligned}$$

Daraus erhält man $B_{Turb.}^2$, wie folgt.

$$B_{Turb.}^2 = B_{min}^2 \sum_n \left(\frac{k_n}{k_{min}}\right)^{-\Gamma+1}$$

Durch Ziehen der Wurzel erhält man schließlich Formel (2.14) und den Exponenten $\frac{-\Gamma+1}{2}$.

Literaturverzeichnis

- [1] Oleg G. Bakunin. *Turbulence and Diffusion - Scaling Versus Equations*, volume 1. Springer Verlag, 2008.
- [2] F. Aharonian et al. Discovery of very-high-energy gamma-rays from the galactic centre ridge. *nature*, 439:695ff, Februar 2006.
- [3] M. Fatuzzo, F. Melia, E. Todd, and F.C. Adams. High-energy cosmic-ray diffusion in molecular clouds: a numerical approach. *The Astrophysical Journal*, 725:515ff, Dezember 2010.
- [4] Particle Data Group. *Particle Physics Booklet*. Juli 2012.
- [5] Lew D. Landau and Jewgeni M. Lipschitz. *Lehrbuch der theoretischen Physik - II Klassische Feldtheorie*, volume 12. Europa-Lehrmittel, 1992.
- [6] Ulrich Stille. *Messen und Rechnen in der Physik*. Friedr. Vieweg & Sohn Verlag, 1955.
- [7] M. Tsuboi, H. Toshihiro, and N. Ukita. Dense molecular clouds in the galactic center region 1. observations and data. *Astrophys. J. Suppl.*, 120:1–39, 1999.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei all denen bedanken, ohne die diese Arbeit nicht zustande gekommen wäre. Insbesondere bedanken möchte ich mich bei

- Prof. Dr. Christopher van Eldik für die überaus interessante Themenstellung und die sehr gute Betreuung
- meinem Betreuer Alexander Ziegler für die Geduld und Ausdauer beim Erklären der Software und dahinterstehenden Mathematik sowie das Engagement während der gesamten Arbeitsphase
- meinen Zimmerkollegen für die entspannte Atmosphäre
- allen Korrekturlesern für ihre Zeit und Nerven
- sowie dem gesamten ECAP für das freundliche Aufnehmen

Erklärung

Hiermit bestätige ich, dass ich diese Arbeit selbstständig und nur unter Verwendung der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe.

Erlangen, den 05.08.2014

Maximilian Oberndörfer