

Untersuchung des Einflusses verschiedener Modelle für die Unterwasserschallausbreitung auf die Positionskalibrierung von Wasser-Cherenkov Neutrino-Teleskopen

Bachelorarbeit

vorgelegt von
Christopher Geist

Erlangen Centre for Astroparticle Physics
Physikalisches Institut 1
Friedrich-Alexander-Universität
Erlangen-Nürnberg

1. Gutachter: PD Dr. Robert Lahmann
2. Gutachter: Prof. Dr. Ulrich Katz

Tag der Abgabe: 31. 8. 2016

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung	3
2 Schallausbreitung in der Tiefsee	6
2.1 Schallgeschwindigkeit in der Tiefsee	6
2.2 Schallausbreitung entlang des Weges der kürzesten Laufzeit	9
2.3 Schallausbreitung mit linearer Tiefenabhängigkeit der Schallgeschwindigkeit	11
2.4 Näherung der Differentialgleichung	15
2.5 Geradlinige Ausbreitung des Schalls mit gemittelter Schallgeschwindigkeit	16
3 Positionsbestimmung der Detektoren	18
3.1 Implementierung in Matlab	18
3.1.1 Bestimmung der „gemessenen“ Zeit	19
3.1.2 Implementierung der Minimierungsfunktionen	20
3.2 Vergleich der Genauigkeit der Modelle	21
4 Einbeziehung von systematischen und statistischen Fehlern	27
4.1 Statistische Fehler bei der Zeitmessung	27
4.1.1 Emitterkonfiguration mit Entferungen von 200 m	27
4.1.2 Emitterkonfiguration mit Entferungen von 400 m	31
4.1.3 Emitterkonstellation mit Entferungen von 200 m und 400 m	33
4.2 Systematischer Fehler bei der Bestimmung der Schallgeschwindigkeit	40
5 Fazit	43
A Acoustic propagation in deep water	50

Kapitel 1

Einleitung

Neutrinos sind elektrisch ungeladene Elementarteilchen, die nur über die schwache Wechselwirkung mit Materie interagieren. Weiterhin ist die Wechselwirkungswahrscheinlichkeit der Interaktion von Neutrinos mit Materie sehr gering, was sie zu besonders guten Botenteilchen für die Astronomie macht. So propagieren sie geradlinig von ihrer Quelle zur Erde und können auch durch dichte Gebiete hindurch ohne absorbiert zu werden. Ein Forschungsschwerpunkt, der damit gelöst werden könnte, ist der Ursprung der kosmischen Strahlung, welche zum großen Teil aus Hadronen, also Protonen sowie leichten und schweren Atomkernen, besteht. Da diese Teilchen elektrisch geladen sind, werden sie durch Magnetfelder im interstellaren Medium abgelenkt, sodass ihr Ursprungsort nicht rekonstruiert werden kann. Neutrinos hingegen bewegen sich geradlinig von ihrer Quelle zur Erde, sodass die beschleunigende Quelle bestimmt werden kann. [1]

Mögliche Quellen für die kosmische Strahlung und Neutrinos sind zum einen galaktische Quellen wie Supernova-Überreste und zum anderen extra-galaktische Quellen wie Aktive Galaktische Kerne (AGN), welche ein super-massives Schwarzes Loch im Zentrum besitzen, Gamma Ray Bursts oder Starburst Galaxies. [1]

Die Eigenschaft, die Neutrinos hierfür ideal macht, sorgt ebenso dafür, dass sie sehr schwer zu detektieren sind. Das Detektorvolumen muss möglichst groß sein, um eine angemessene Anzahl an hoch-energetischen Neutrinos auswerten zu können. So besitzt das 2010 fertiggestellte Neutrino-Teleskop IceCube am Südpol ein Detektorvolumen von einem Kubikkilometer [1]. Eben jenes Teleskop motivierte aufgrund der Detektion eines hoch-energetischen, astrophysikalischen Neutrino-Signals kosmischen Ursprungs und durch Arbeiten über den Beitrag des Elektronen-neutrino zum dritten Neutrino-Masseneigenzustand durch Daya Bay, Reno und anderen, den Bau eines Neutrino-Teleskops namens KM3NeT [2]. Dieses wird ein Detektorvolumen von mehreren Kubikkilometer haben und im Mittelmeer unter Wasser installiert sein [1]. Die Standorte für KM3NeT werden vor Porto Palo di Capo Passero auf Sizilien, Toulon (Frankreich) und Pylos (Griechenland) liegen. Wichtige Aufgaben des Teleskops werden die

- Entdeckung und Beobachtung von hoch-energetischen Neutrinoquellen und die
- Bestimmung der Massenhierarchie der Neutrinos

sein. In dieser Arbeit wird einer der „building blocks“ von KM3NeT für die Untersuchungen der Positionskalibrierung der DOMs (Digital Optical Moduls, siehe Abb. 1.2) herangenommen. Dieser „building block“ liegt vor Sizilien bei den Koordinaten $36^{\circ} 17' 48.3099''$ Nord und $15^{\circ} 58' 34.820''$ Ost, dessen Standort in Abbildung 1.1 zu sehen ist. Ein „building block“ besteht aus 115 „Strings“, an denen 18 DOMs, die wiederum aus 31 Photomultiplierröhren (PMTs) bestehen, befestigt sind. „Strings“ sind zwei parallele Dyneema® Seile zwischen denen die 18 DOMs angebracht sind. Zurzeit werden in der ersten Phase des Projektes, die 2017 abgeschlossen sein soll, drei „building blocks“ aufgebaut; zwei vor Capo Passero und eines vor Toulon. Die



Abbildung 1.1: Standort des in dieser Arbeit betrachteten „building blocks“ von KM3NeT [2]



Abbildung 1.2: Ein Digital Optical Modul, welches bei KM3NeT zum Einsatz kommt [2]

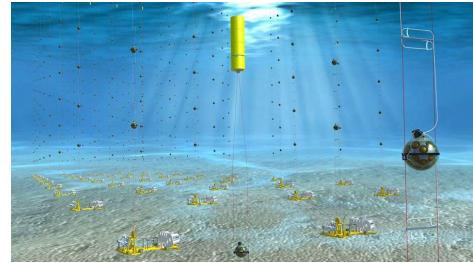


Abbildung 1.3: Grundsätzlicher Aufbau eines „building blocks“ von KM3NeT [3]

zwei „building blocks“ vor der sizilianischen Küste sollen das entdeckte IceCube-Signal hoch-energetischer, kosmischer Neutrinos mit verbesserter Auflösung, verschiedener Methodik und komplementärem Sichtfeldern vermessen. Diese werden ARCA (Astroparticle Research with Cosmic in the Abyss) genannt [2].

Der „building block“ vor Toulon soll präzise Messungen von Oszillationen atmosphärischer Neutrinos machen und wird deshalb ORCA (Oszillation Research with Cosmic in the Abyss) genannt. [2]

Der prinzipielle Aufbau von ARCA und ORCA ist ähnlich. Beide sind in der Tiefsee angebracht und besitzen die gleiche Anzahl von „Strings“, jedoch mit unterschiedlicher Länge und Abstand zueinander. Der in folgender Arbeit betrachtete „building block“ ist ein ARCA-Detektor in einer Tiefe von 3500 m etwa 100 km vor der Küste. Die „Strings“ sind etwa 700 m lang, wobei der erste DOM etwa 80 m über dem Meeresgrund befestigt ist. Die weiteren DOMs sind mit einem Abstand von jeweils 36 m voneinander befestigt. Weiterhin sind die einzelnen „Strings“ etwa 95 m auseinander. In Abbildung 1.3 ist der grundsätzliche Aufbau eines „building blocks“ mit den an „Strings“ angebrachten DOMs zu sehen. Die analogen Messdaten der Photomultiplier werden vor Ort digitalisiert und über Breitbanddatenkabel zum Festland geschickt. [2]

Bei KM3NeT handelt es sich um ein Cherenkov-Teleskop, bei dem Photomultiplier verwendet

werden, um gleichnamige Strahlung – die sog. Cherenkov-Strahlung – zu detektieren. Diese Strahlung entsteht, wenn ein relativistisches, geladenes Teilchen, d.h. das geladene Teilchen ist schneller als die Lichtgeschwindigkeit im Medium, durch das Medium hindurch fliegt und dort die Moleküle kurzzeitig polarisiert. Diese senden dann elektromagnetische Strahlung aus, die einen Lichtkegel formt, ähnlich dem Überschallkegel in der Luft. Solche relativistischen und geladenen Teilchen wie z.B. Myonen entstehen bei der Wechselwirkung von Neutrinos mit Materie [1]. Fliegt das Myon vom Meeresgrund in Richtung Oberfläche, ist es sicher, dass das Myon in einer Neutrinointeraktion entstanden ist, da nur Neutrinos die Erde durchdringen können, ohne absorbiert zu werden.

Für den Betrieb des Detektors, d.h. für die Rekonstruktion einer Teilchenspur, müssen die Zeitmessungen im Nanosekundenbereich liegen, was eine Genauigkeit für die Kenntnis der Position der DOMs von wenigen Zentimeter verlangt [2]. Der Aufbau der „Strings“ bewirkt, dass sie nicht statisch im Wasser stehen, sondern sich aufgrund von Strömungen bewegen. Damit muss für jede Messung die Position der DOMs bestimmt werden, die folgendermaßen durchgeführt wird: Um die Strings des Detektors werden an den „secondary junction boxes“ mehrere Schallemitter, die am Meeresgrund angebracht sind, installiert sein. Die Emittoren werden ca. 200 m von den Strings entfernt sein und Schallwellen mit bekannter Frequenz aussenden, die dann von Detektoren an den DOMs registriert werden. Dadurch kann die Laufzeit der emittierten Welle gemessen werden, die die Schallwelle vom Emitter bis zum Empfänger (DOM) benötigt hat. Für die Positionierung werden noch zwei Voraussetzungen benötigt. Zum einen muss die Position der Emittoren bekannt sein. Zum anderen wird eine Zeitformel, die aus der Position des Empfängers und der Position der Emittoren die Laufzeit berechnen kann, benötigt. Diese werden aus den in dieser Arbeit betrachteten Modellen der Schallausbreitung stammen. Das Ziel dieser Arbeit ist nun, die Genauigkeiten der Modelle bzgl. der rekonstruierten Position zu vergleichen, wobei auch statistische Fehler auf die Zeitmessung der Laufzeit und systematische Fehler auf die Bestimmung der Schallgeschwindigkeit im Wasser berücksichtigt werden.

Kapitel 2

Schallausbreitung in der Tiefsee

In diesem Kapitel wird die Abhängigkeit der Schallgeschwindigkeit von den Größen Druck, Temperatur und Salinität (Salzgehalt) besprochen und deren Berechnung mit einer empirisch bestimmten Formel, der sogenannten UNESCO-Formel von Chen und Millero, dargestellt. Weiterhin wird zuerst ein Modell beschrieben, mit dem die tatsächliche Schallausbreitung mit den aus der UNESCO-Formel bestimmten Schallgeschwindigkeiten numerisch bestimmt werden kann. Dariuber hinaus werden drei Modelle, die für die spätere Positionierung hergenommen werden, beschrieben. Das erste Modell nimmt eine lineare Abhängigkeit der Schallgeschwindigkeit von der Tiefe an, wohingegen dem zweiten eine geradlinige Ausbreitung des Schalls mit einer gemittelten, konstanten Schallgeschwindigkeit zugrunde liegt. Das dritte Modell ist eine Näherung des ersten Modells.

2.1 Schallgeschwindigkeit in der Tiefsee

Die Schallgeschwindigkeit des Wassers hängt von der Salinität, der Temperatur und dem Druck ab, da diese die Dichte des Meerwassers verändert, sodass die Schallgeschwindigkeit erhöht wird. Der Grund dafür ist, dass eine dichtere Packung der Moleküle im Wasser die mittlere freie Weglänge der Teilchen verringert und so die Störung, welche der Schallwelle entspricht, schneller weitergegeben wird. Somit hängt die Schallgeschwindigkeit nicht explizit von der Tiefe ab. Um dennoch die Schallgeschwindigkeit mit ausreichender Genauigkeit für verschiedene Tiefen zu ermitteln, wird die UNESCO-Formel von Chen und Millero verwendet, die in Abhängigkeit von Temperatur, Druck und Salinität die Schallgeschwindigkeit bestimmt und danach mit Messwerten für die Tiefe verbunden wird. Die UNESCO-Formel hat folgende Form: [4]

$$\begin{aligned} c(T, P, S) &= C_w(T, P) + A(T, P) \cdot S + B(T, P) \cdot S^{3/2} + D(T, P) \cdot S^2 & (2.1) \\ C_w(T, P) &= (C_{00} + C_{01}T + C_{02}T^2 + C_{03}T^3 + C_{04}T^4 + C_{05}T^5) \\ &\quad + (C_{10} + C_{11}T + C_{12}T^2 + C_{13}T^3 + C_{14}T^4)P \\ &\quad + (C_{20} + C_{21}T + C_{22}T^2 + C_{23}T^3 + C_{24}T^4)P^2 \\ &\quad + (C_{30} + C_{31}T + C_{32}T^2)P^3 \\ A(T, P) &= (A_{00} + A_{01}T + A_{02}T^2 + A_{03}T^3 + A_{04}T^4) \\ &\quad + (A_{10} + A_{11}T + A_{12}T^2 + A_{13}T^3 + A_{14}T^4)P \\ &\quad + (A_{20} + A_{21}T + A_{22}T^2 + A_{23}T^3)P^2 \\ &\quad + (A_{30} + A_{31}T + A_{32}T^2)P^3 \\ B(T, P) &= B_{00} + B_{01}T + (B_{10} + B_{11}T)P \\ D(T, P) &= D_{00} + D_{10}P \end{aligned}$$

$c(T, P, S)$ bezeichnet die Schallgeschwindigkeit bei der Temperatur T , dem Druck P und der Salinität S . Die Koeffizienten C_{ij} , A_{kl} , B_{mn} und D_{uv} sind tabelliert vorzufinden, so z.B. in [4]. Der Gültigkeitsbereich dieser Formel reicht von $0 - 40^\circ\text{C}$, einem Salzgehalt von $0 - 40$ parts per thousand und einem Druck von $0 - 1000$ bar [4]. Diese Formel wurde von Chen und Millero 1977 durch Messungen an Standardmeerwasser, welches sie mit reinem Wasser verdünnt bzw. durch Verdunstung konzentriert haben, im Vergleich mit reinem Wasser, aufgestellt. Die Koeffizienten sind somit aus dem Fit des obigen Modells an Messdaten entstanden [6].

Für die Untersuchungen in dieser Arbeit wurden, wie in der Einleitung bereits erwähnt, Messdaten von Druck, Temperatur und Salinität des Standorts Porto Palo di Capo Passero vor Sizilien verwendet, mit denen die Schallgeschwindigkeitswerte mit obiger Formel (2.1) berechnet und mit Messwerten für die Tiefe verknüpft werden. Daraus folgt eine Schallgeschwindigkeitsbeziehung die explizit von der Tiefe abhängt. Im Folgenden sind die Profile der drei Größen und der Schallgeschwindigkeit an diesem Standort abgebildet.

Die Temperatur sinkt mit steigender Tiefe, allerdings nicht gleichmäßig, wie in Abbildung 2.1

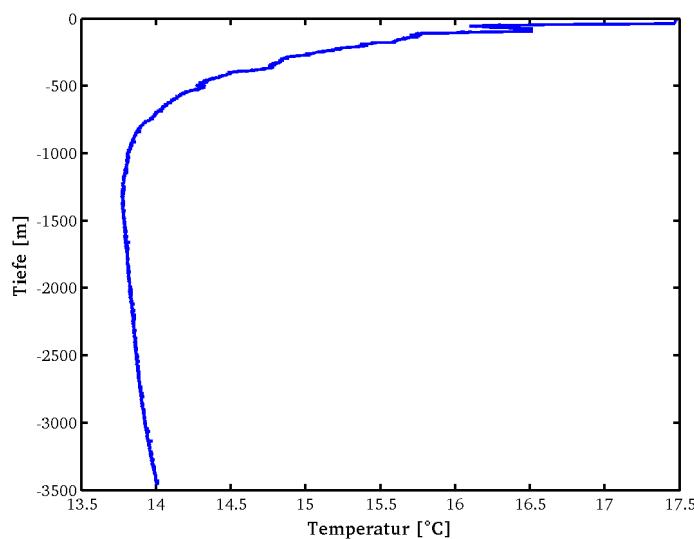


Abbildung 2.1: Temperaturprofil am Standort Porto Palo di Capo Passero

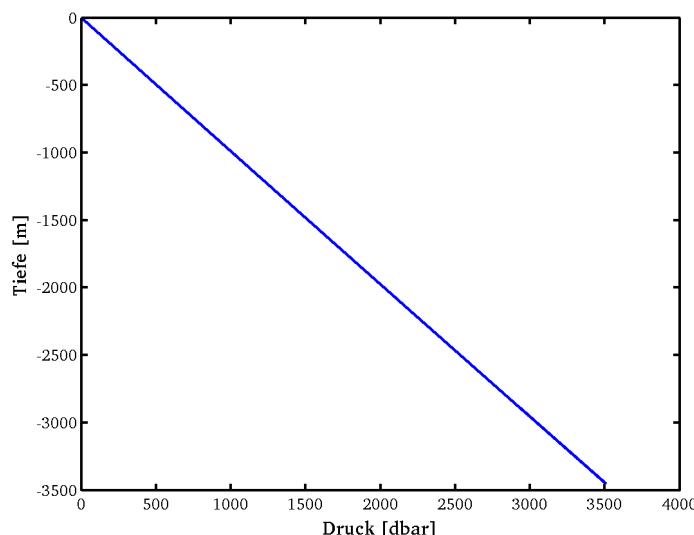


Abbildung 2.2: Druckprofil am Standort Porto Palo di Capo Passero

zu sehen ist, da in den oberen Schichten durch Strömungen wärmeres und kälteres Wasser

durchmischt werden, sodass es z.B. in einer Tiefe von etwa 100 m wieder zu einer Erhöhung der Temperatur kommt. Trotzdem sinkt die Temperatur mit noch größerer Tiefe wieder, bis sie zwischen -1000 m und -1500 m ein Minimum besitzt und danach leicht ansteigt. Nun hingegen mit geringerer Steigung, sodass sich die Temperatur unterhalb der -1500 m Marke im Bereich von $13,75^\circ\text{C}$ und 14°C bewegt.

In Abbildung 2.2 ist das Druckprofil für den Standort vor Sizilien zu sehen. Der Druck verhält sich linear mit der Tiefe und erreicht am Meeresgrund einen Wert von etwa $3500\text{ dbar} = 350\text{ bar}$.

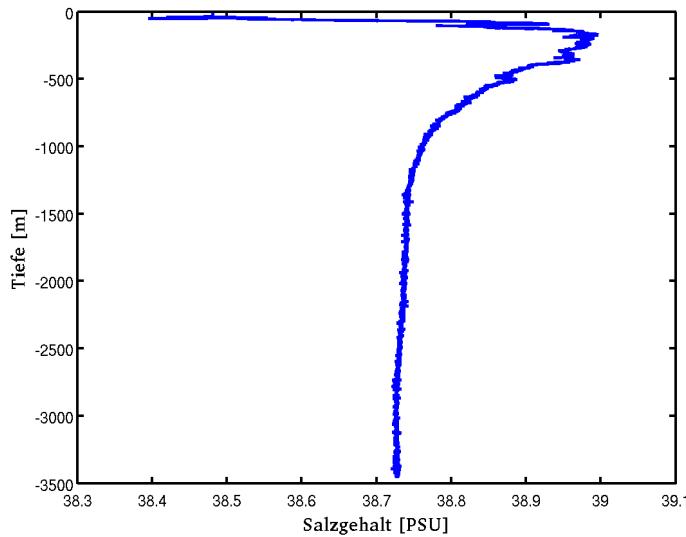
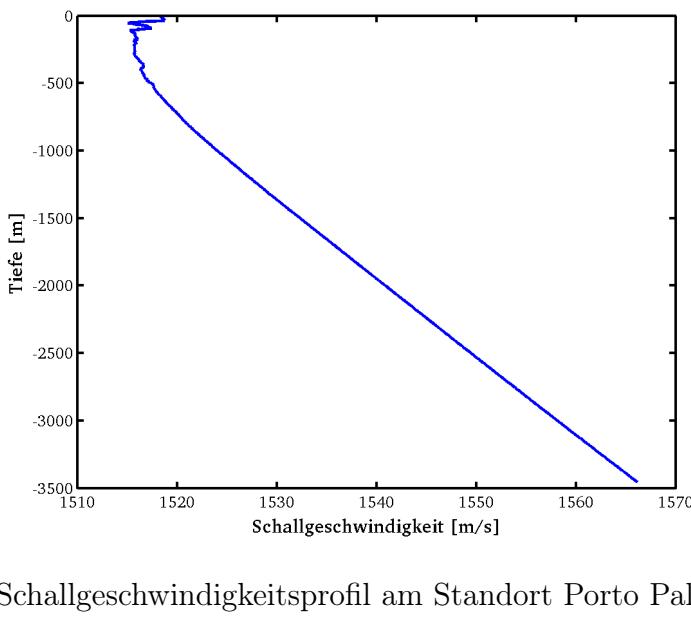


Abbildung 2.3: Salinitätsprofil am Standort Porto Palo di Capo Passero



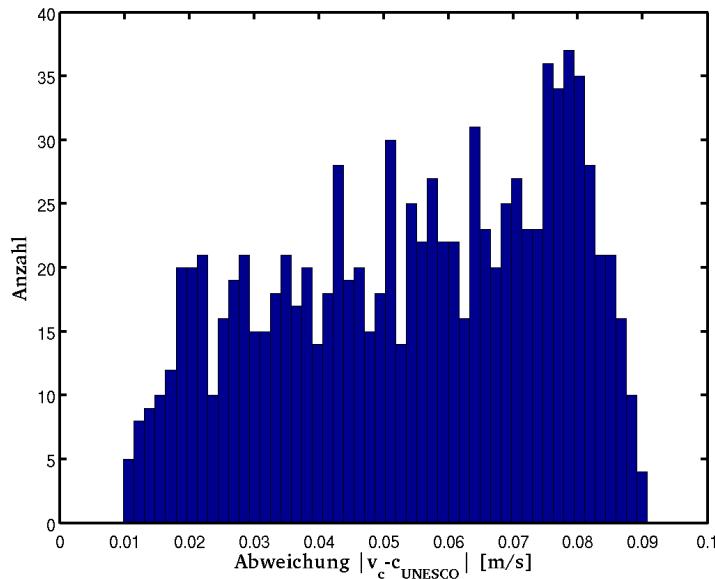


Abbildung 2.5: Abweichung der berechneten Werte mittels UNESCO-Formel (2.1) von den berechneten Werten aus der Del Grossos Formel der Schallgeschwindigkeit in Salzwasser am Standort Capo Passero von -3453.629 m bis -2453.629 m Tiefe

vergrößert sie sich nichtlinear, bis sie ab einer Tiefe von 1000 m annähernd linear ist. Dies liegt vor allem daran, dass sich das Temperatur- und Salzgehaltprofil in dieser Region nicht stark ändern, während das Druckprofil weiter einen linearen Verlauf zeigt, der sich dementsprechend auf den Verlauf der Schallgeschwindigkeit überträgt. Leichte Änderungen des Temperatur- und Salinitätsprofils verursachen, dass die Schallgeschwindigkeitswerte um den linearen Verlauf zittern. Bei der späteren Positionierung führt das zu größeren Fehlern.

Die Schallgeschwindigkeitswerte der UNESCO-Formel kann in diesem Fall durch errechnete Werte der Schallgeschwindigkeit in Abhängigkeit der Tiefe mit der Del Grossos Formel überprüft werden. Hierfür kann die mittlere Abweichung der UNESCO-Werte von den Del Grosso-Werten in einem Tiefenbereich von -3453.629 m bis 1000 m über dem Meeresgrund, was die Höhe von KM3NeT enthält, berechnet werden:

$$\overline{|c_{\text{gemessen}} - c_{\text{UNESCO}}|} = 0.054484 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \sigma_{\text{Abweichung}} = 0.021436 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (2.2)$$

Damit liegt die mittlere Abweichung der berechneten Schallgeschwindigkeitswerte, deren Verteilung in Abbildung 2.5 zu sehen ist, bei etwa $10^{-3}\%$ von typischen Werten für die Geschwindigkeit des Schalls in diesen Tiefen.

2.2 Schallausbreitung entlang des Weges der kürzesten Laufzeit

Um die Trajektorie des Schalls in einem inhomogenen Medium ohne Eigenbewegung, (d.h. ohne Strömungen etc.,) zu bestimmen, wird das Fermat'sche Prinzip verwendet bzw. mit der Variationsrechnung der Weg der kürzesten Laufzeit bestimmt. Das Fermat'sche Prinzip kann mit Hilfe der Variationsrechnung wie folgt definiert werden:

$$\delta T = \delta \int dt = 0 \quad (2.3)$$

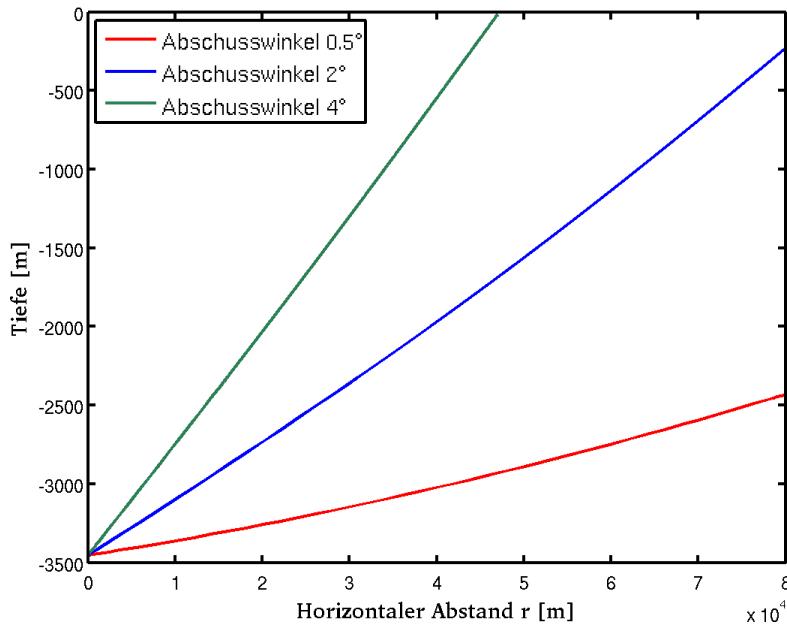


Abbildung 2.6: Trajektorien des Schalls aus dem gekoppelten Differentialgleichungssystem für verschiedene Startwinkel

Mittels Variationsrechnung kann hieraus ein System aus drei gekoppelten Differentialgleichungen hergeleitet werden. Die exakte Herleitung kann z.B. unter [5] eingesehen werden. Um die Differentialgleichungen einfacher zu halten, wird in ein Koordinatensystem mit einer vertikalen Koordinate z , einer horizontalen Koordinate r sowie einem Winkel θ zwischen der horizontalen und vertikalen Komponente gewechselt. Hierbei bezeichnet r den radialen Abstand vom Koordinatenursprung, d.h. $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Weiterhin wird angenommen, dass die Schallgeschwindigkeit prinzipiell nur von der vertikalen Koordinate abhängt, d.h. es gilt $c = c(z)$ [5]. In diesem Koordinatensystem und der so gewählten Schallgeschwindigkeit nimmt die Differentialgleichung für den Winkel θ folgende Form an:

$$\frac{d\theta}{dr} = -\frac{\partial_z c}{c} \quad (2.4)$$

Für die vertikale Koordinate z , welche mit der Tiefe gleich zu setzen ist, wird folgende Differentialgleichung hergeleitet:

$$\frac{dz}{dr} = \tan \theta \quad (2.5)$$

Zuletzt kann noch eine Differentialgleichung für die Laufzeit des Schalls angegeben werden:

$$\frac{dt}{dr} = \frac{\sec \theta}{c} \quad (2.6)$$

Mit diesen drei gekoppelten Differentialgleichungen kann nun die Trajektorie der Schallwelle bestimmt werden. Werden für die Schallgeschwindigkeit c die Werte des UNESCO-Algorithmus verwendet, ist das Modell realitätsnah. Es kann jedoch nur numerisch gelöst werden. Damit wird die gemessene Zeit bei der Positionsbestimmung simuliert. In Abbildung 2.6 sind einige Trajektorien für verschiedene Anfangswinkel zu sehen. Diese sind durch das Lösen der drei Differentialgleichungen mithilfe eines „differential equation solver“ in Matlab entstanden. Es ist in Abbildung 2.6 sehr gut zu sehen, dass je steiler der „Abschusswinkel“ ist, desto weniger gekrümmt die Kurve ist. Dies ist durch die unterschiedliche Steigung des Winkels θ für verschiedene Abschusswinkel zu erklären. Durch auflösen von (2.5) nach dr und einsetzen in (2.4),

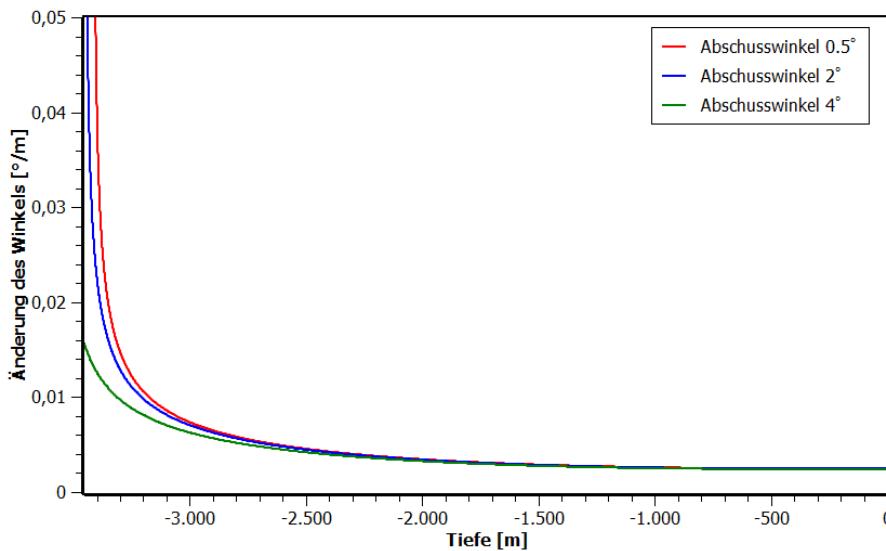


Abbildung 2.7: Änderung des Winkels bzgl. der Tiefe z für verschiedene Abschusswinkel in einer Tiefe von 3453.629 m

folgt die Gleichung:

$$\tan \theta d\theta = -\frac{\partial_z c(z)}{c(z)} dz \quad (2.7)$$

Die linke Seite wird nun von θ_0 , dem Abschusswinkel, bis θ und die rechte Seite von z_0 bis z hochintegriert. Damit ergibt sich eine Gleichung für θ in Abhängigkeit von z folgender Form:

$$\theta(z) = \arccos \left(\cos \theta_0 \frac{c(z)}{c(z_0)} \right) \quad (2.8)$$

Durch Ableiten obiger Beziehung bekommt man folgende Gleichung, welche die Änderung des Winkels bzgl. der Tiefe z repräsentiert.

$$\frac{d\theta(z)}{dz} = -\frac{\frac{\cos \theta_0}{c(z_0)} \frac{d}{dz} c(z)}{\sqrt{1 - \left(\frac{\cos \theta_0 \cdot c(z)}{c(z_0)} \right)^2}} \quad (2.9)$$

In Abbildung 2.7 ist die Ableitung des Winkels bzgl. z für die verschiedenen Abschusswinkel zu sehen. Anhand dieser Grafik ist sehr deutlich zu sehen, dass je kleiner der Anfangswinkel ist, desto stärker die Winkeländerung ist, wenn die Trajektorie in Richtung Oberfläche läuft. Der flache Abschusswinkel sorgt zunächst dafür, dass die Trajektorie nur langsam an Höhe bzgl. des Meeresgrunds gewinnt. Indessen ändert sich der Winkel stärker pro vertikale Strecke, was zu der beobachtbaren Krümmung führt. Danach nähern sich die Steigungen für verschiedene Startwinkel wieder an, sodass es nicht dazu kommt, dass eine Schallwelle, die mit geringerem Anfangswinkel abgeschossen wurde, die Oberfläche in kleineren horizontalen Abstand erreicht, als eine Schallwelle mit größerem Abschusswinkel.

2.3 Schallausbreitung mit linearer Tiefenabhängigkeit der Schallgeschwindigkeit

Es kann ein analytisches lösbares Modell für die Ausbreitung des Schalls erstellt werden, indem für die Schallgeschwindigkeit eine lineare Abhängigkeit von der Tiefe angenommen wird. Die-

se Annahme ist durch das Schallgeschwindigkeitsprofil in Abbildung 2.4 aus dem Kapitel 2.1, welche in Tiefen unter 1500 m linear erscheint, gerechtfertigt. Mit dem Ansatz $c(z) = c_0 - kz$ für die Schallgeschwindigkeit ist es möglich, aus geometrischen Überlegungen eine Differentialgleichung für die Schallwelle herzuleiten. Die Herleitung wird nicht explizit gezeigt, sondern kann im Anhang, welcher die Arbeit „Acoustic propagation in deep water“ von U. Katz enthält, nachgeschlagen werden. Die beiden Parameter werden später durch einen Fit an die tatsächliche Geschwindigkeitsverteilung am Standort aus Kapitel 2.1 bestimmt. Es ist nun noch die folgende nichtlineare Differentialgleichung zu lösen:

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \left[1 + \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 \right] \cdot \frac{k}{c_0 - kz} \quad (2.10)$$

bzw. in vereinfachter Notation:

$$z'' = k \cdot \frac{1 + (z')^2}{c_0 - kz} \quad (2.11)$$

Da es sich hierbei um eine autonome Differentialgleichung zweiter Ordnung handelt, d.h. sie ist von der Form $z'' = f(z, z')$, ohne explizite x -Abhängigkeit, kann folgende Substitution verwendet werden:

$$z' = p(z); \quad z''(x) = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = p'(z)p(z) = f(z, p) \quad (2.12)$$

Wird dies nun nach $p'(z)$ aufgelöst, folgt hieraus eine Differentialgleichung erster Ordnung für $p(z)$:

$$p'(z) = \frac{1}{p(z)} f(z, p) \quad (2.13)$$

Wird dies auf die Differentialgleichung (2.10) angewandt, erhält man:

$$p'(z) = \frac{1}{p(z)} k \frac{1 + p(z)^2}{c_0 - kz} = \left[\frac{1}{p(z)} + p(z) \right] \frac{k}{c_0 - kz} \quad (2.14)$$

Diese Gleichung kann mittels Trennung der Variablen und anschließender Integration gelöst werden. Hierbei werden die Randbedingungen $z(x_0) = z_0$ und $z'(x_0) = z'_0$ verwendet und es folgt damit:

$$\int_{z'_0}^p \frac{1}{\frac{1}{\bar{p}(z)} + \bar{p}(z)} d\bar{p} = \int_{z_0}^z \frac{k}{c_0 - kz} dz \quad (2.15)$$

$$\left[\frac{\ln(\bar{p}^2 + 1)}{2} \right]_{z'_0}^p = [-\ln(c_0 - kz)]_{z_0}^z \quad (2.16)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \ln \left(\frac{p^2 + 1}{z'^2 + 1} \right) = -\ln \left(\frac{c_0 - kz}{c_0 - kz_0} \right) \quad (2.17)$$

Die Gleichung (2.17) muss nun nach p aufgelöst werden, sodass sich die Funktion $p(z)$ ergibt, mit der oben substituiert wurde.

$$\ln \left(\frac{p^2 + 1}{z'^2 + 1} \right) = \ln \left(\frac{c_0 - kz}{c_0 - kz_0} \right)^{-2} \quad (2.18)$$

$$\frac{p^2 + 1}{z'^2 + 1} = \left(\frac{c_0 - kz_0}{c_0 - kz} \right)^2 \quad (2.19)$$

$$\Rightarrow p = \sqrt{(z'^2 + 1) \left(\frac{c_0 - kz_0}{c_0 - kz} \right)^2 - 1} \quad (2.20)$$

Nun kann $x(z)$ durch nochmalige Integration über z bestimmt werden, wobei auf der linken Seite o.B.d.A. angenommen wurde, dass $x_0 = 0$ ist. Die Umkehrfunktion davon ist dann die Lösung der Differentialgleichung (2.10).

$$x(z) = \int_{z_0}^z \frac{1}{\sqrt{(z_0'^2 + 1) \left(\frac{c_0 - kz_0}{c_0 - kz} \right)^2 - 1}} d\bar{z} \quad (2.21)$$

$$= \frac{\sqrt{(z_0'^2 + 1)(c_0 - kz_0)^2 - (c_0 - kz)^2}}{k} - \frac{\sqrt{(z_0'^2 + 1)(c_0 - kz_0)^2 - (c_0 - kz_0)^2}}{k} \quad (2.22)$$

$$= \frac{\sqrt{(z_0'^2 + 1)(c_0 - kz_0)^2 - (c_0 - kz)^2}}{k} - \frac{z_0'(c_0 - kz_0)}{k} \quad (2.23)$$

Die Umkehrfunktion und damit die Lösung lautet somit:

$$z(x) = \frac{c_0}{k} - \frac{\sqrt{(z_0'^2 + 1)(c_0 - kz_0)^2 - (kx + z_0'(c_0 - kz_0))^2}}{k} \quad (2.24)$$

Weiterhin ist aus folgender Bedingung z_0' bestimmbar, da gelten muss, dass $z_1 = z(x_1)$ ist. Die Trajektorie sollte den Empfänger treffen, sobald sie die horizontale Strecke x_1 (o.B.d.A. kann $x_0 = 0$ gesetzt werden) zurückgelegt hat:

$$z_1 = \frac{c_0}{k} - \frac{\sqrt{(z_0'^2 + 1)(c_0 - kz_0)^2 - (kx_1 + z_0'(c_0 - kz_0))^2}}{k} \quad (2.25)$$

$$\Rightarrow z_0' = -\frac{(c_0 - kz_1)^2}{2kx_1(c_0 - kz_0)} + \frac{(c_0 - kz_0)}{2kx_1} - \frac{kx_1}{2(c_0 - kz_0)} \quad (2.26)$$

Für die spätere Positionierung der DOMs wird noch eine Formel für die Laufzeit des Schalls benötigt. Die Laufzeit gibt an, wie lange der Schall vom Emitter bis zum Empfänger braucht. Hierfür muss folgendes Integral berechnet werden:

$$T = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + z'^2}}{c_0 - kz} dx = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + \frac{(kx + z_0'(c_0 - kz_0))^2}{(z_0'^2 + 1)(c_0 - kz_0)^2 - (kx + z_0'(c_0 - kz_0))^2}}}{\sqrt{(z_0'^2 + 1)(c_0 - kz_0)^2 - (kx + z_0'(c_0 - kz_0))^2}} dx \quad (2.27)$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{\frac{(z_0'^2 + 1)(c_0 - kz_0)^2 - (kx + z_0'(c_0 - kz_0))^2 + (kx + z_0'(c_0 - kz_0))^2}{[(z_0'^2 + 1)(c_0 - kz_0)^2 - (kx + z_0'(c_0 - kz_0))^2]^2}} dx \quad (2.28)$$

$$= \sqrt{(z_0'^2 + 1)(c_0 - kz_0)} \int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{(z_0'^2 + 1)(c_0 - kz_0)^2 - (kx + z_0'(c_0 - kz_0))^2} dx \quad (2.29)$$

Das Integral kann mit Hilfe der Partialbruchzerlegung berechnet werden. Dazu wird der Integrand folgendermaßen umgeschrieben:

$$\frac{1}{(\sqrt{(z_0'^2 + 1)}(c_0 - kz_0) - (kx + z_0'(c_0 - kz_0)))(\sqrt{(z_0'^2 + 1)}(c_0 - kz_0) + (kx + z_0'(c_0 - kz_0)))} \quad (2.30)$$

$$= \frac{a_1}{(\sqrt{(z_0'^2 + 1)}(c_0 - kz_0) - (kx + z_0'(c_0 - kz_0)))} + \frac{a_2}{(\sqrt{(z_0'^2 + 1)}(c_0 - kz_0) + (kx + z_0'(c_0 - kz_0)))} \quad (2.31)$$

Durch Multiplikation des Nenners der linken Seite und Sortierung nach Potenzen von x entsteht ein Gleichungssystem für die Parameter a_1 und a_2 . Dieses Gleichungssystem muss im Anschluss gelöst werden, um folgendes Ergebnis zu erhalten:

$$a_1 = a_2 = a = \frac{1}{2\sqrt{(z_0'^2 + 1)}(c_0 - kz_0)} \quad (2.32)$$

Damit lässt sich das Integral nun elementar lösen und folgende Berechnung ist durchzuführen:

$$T = \frac{\sqrt{(z_0'^2 + 1)}(c_0 - kz_0)}{2\sqrt{(z_0'^2 + 1)}(c_0 - kz_0)} \int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{(\sqrt{(z_0'^2 + 1)}(c_0 - kz_0) - (kx + z_0'(c_0 - kz_0)))} \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{1}{(\sqrt{(z_0'^2 + 1)}(c_0 - kz_0) + (kx + z_0'(c_0 - kz_0)))} dx \\ &= \frac{1}{2k} \left[\ln \left(\frac{(\sqrt{(z_0'^2 + 1)}(c_0 - kz_0) + (kx + z_0'(c_0 - kz_0)))}{(\sqrt{(z_0'^2 + 1)}(c_0 - kz_0) - (kx + z_0'(c_0 - kz_0)))} \right) \right]_{x_0}^{x_1} \end{aligned} \quad (2.34)$$

Somit beträgt die Laufzeit zwischen den Punkten $(0, z_0)$ und (x_1, z_1) :

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2k} \left[\ln \left(\frac{(\sqrt{(z_0'^2 + 1)}(c_0 - kz_0) + (kx_1 + z_0'(c_0 - kz_0)))}{(\sqrt{(z_0'^2 + 1)}(c_0 - kz_0) - (kx_1 + z_0'(c_0 - kz_0)))} \right) \right. \\ &\quad \left. - \ln \left(\frac{(\sqrt{(z_0'^2 + 1)}(c_0 - kz_0) + z_0'(c_0 - kz_0)))}{(\sqrt{(z_0'^2 + 1)}(c_0 - kz_0) - z_0'(c_0 - kz_0)))} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.35)$$

Die Laufzeit hängt von der Position des Empfängers und der Position des Emitters ab. In Abbildung 2.8 ist die Kurve (2.24) für die gleichen Abschusswinkel wie in Abbildung 2.6 dargestellt. Auch hier ist zu sehen, dass die Trajektorie mit kleinerem Abschusswinkel gekrümmter ist, als mit größerem Winkel. Doch ist zu erkennen, dass das analytische Modell wesentlich schneller in Richtung Oberfläche geht, als das Modell aus Kapitel 2.2. Betrachtet man jedoch die Dimensionen des späteren Detektors, wird deutlich, dass die beiden Kurven nahe bei einander liegen. Das kann in Abbildung 2.9 für einen horizontalen Abstand von 1000 m gesehen werden. Weiterhin zeigt die Abbildung 2.4, dass eine lineare Abhängigkeit der Schallgeschwindigkeit bzgl. der Tiefe für Werte oberhalb von -1000 m nicht mehr stimmt. In diesem Bereich ist das Modell nicht mehr anwendbar.

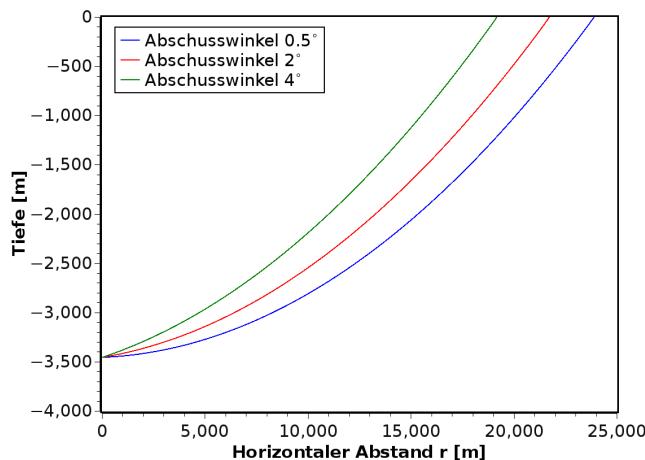


Abbildung 2.8: Trajektorien des analytischen Modells für verschiedene Startwinkel

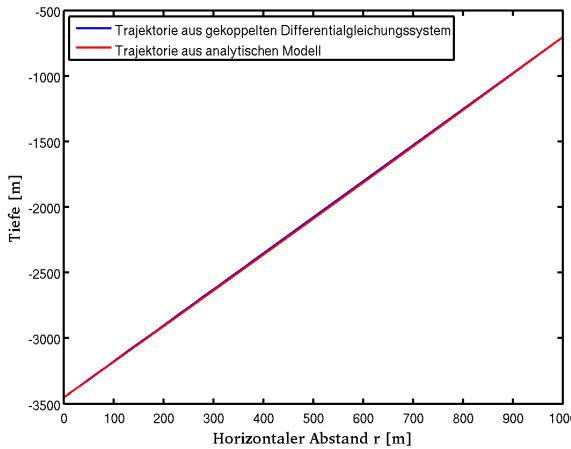


Abbildung 2.9: Vergleich der Trajektorie des analytischen Modells mit der Trajektorie des Modells der kürzesten Laufzeit aus Kapitel 2.2 für einen horizontalen Abstand von 1000 m und einem Startwinkel von 70°

2.4 Näherung der Differentialgleichung

Die Gleichung (2.10) kann für Distanzen in z -Richtung von unter einem Kilometer angenähert werden, indem man $c_0 - kz \approx c_0$ setzt. Die Differentialgleichung vereinfacht sich dann auf folgende Gleichung:

$$z'' = \frac{k}{c_0}(1 + (z')^2) \quad (2.36)$$

Die Herleitung der Lösung dieser Gleichung, sowie die Ableitung einer Formel für die Laufzeit sind ebenfalls im Anhang zu finden. Die Lösung dieser Gleichung ist:

$$z(x) = -\frac{c_0}{k} \ln \left[\tan \left(\frac{k}{c_0}(x - \gamma) \right) \right] + \varepsilon \quad (2.37)$$

Hierbei sind sowohl γ als auch ε Integrationskonstanten, die durch Randbedingungen bestimmt werden müssen. Werden nun als Randbedingungen $z_0 = z(x_0)$ und $z_1 = z(x_1)$ gewählt und o.B.d.A. $x_0 = 0$ sowie $x_1 > 0$ angenommen, bekommen die beiden Integrationskonstanten folgende Form:

$$\gamma = \frac{c_0}{k} \arctan \left[\frac{\exp \left(-\frac{k}{c_0}(z_1 - z_0) \right) - \cos \left(\frac{kx_1}{c_0} \right)}{\sin \left(\frac{kx_1}{c_0} \right)} \right] \quad (2.38)$$

$$\varepsilon = z_0 + \frac{c_0}{k} \ln \left[\frac{\sin \left(\frac{kx_1}{c_0} \right)}{\sqrt{\sin^2 \left(\frac{kx_1}{c_0} \right) + \left(\exp \left(-\frac{k}{c_0}(z_1 - z_0) \right) - \cos \left(\frac{kx_1}{c_0} \right) \right)^2}} \right] \quad (2.39)$$

Damit kann ebenfalls noch ein Korrekturterm für den Winkel am Abschussort berechnet werden, indem die Steigung am Abschussort in einer Taylor-Reihe bezüglich (k/c_0) entwickelt wird und nur Terme bis zur ersten Ordnung betrachtet werden. Dieser lautet dann:

$$\beta - \Delta\beta \approx \arctan \left(\frac{z_1}{x_1} \right) - \frac{k}{2c_0} x_1 \quad (2.40)$$

Der erste Term ist der Abschusswinkel für die lineare Propagation. Der zweite Term ist der Korrekturwinkel. Zuletzt kann noch die Laufzeit berechnet werden. Wird folgende Beziehungen $kz/c_0, kx/c_0 \ll 1$ angenommen, folgt diese Gleichung für die Laufzeit des Strahls.

$$T = \frac{x_1 - x_0}{c_0 \cos \alpha} \left[1 + \frac{k}{c_0} (\tan \alpha + \sin \alpha) \frac{x_0 + x_1}{2} \right] + \mathcal{O} \left(\left(\frac{k}{c_0} \right)^2 \right) \quad (2.41)$$

Weiterhin verbessert sich die berechnete Zeit, wenn statt α der Winkel $\beta - \Delta\beta$ in (2.41) eingesetzt wird.

In Abbildung 2.10 ist der Kurvenverlauf für die Anfangswinkel 0.5° , 2° und 4° gezeigt. Der Ver-

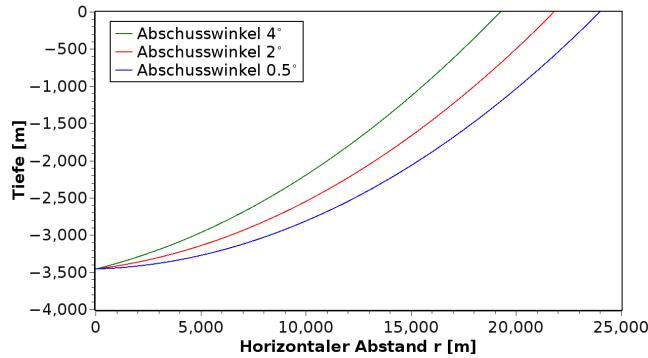


Abbildung 2.10: Trajektorien des genäherten analytischen Modells für verschiedene Startwinkel

lauf ähnelt dem nicht genäherten Verlauf. Durch einen Vergleich mit diesem ist zu erkennen, dass sie für den Bereich in dem der Detektor sein wird faktisch deckungsgleich – also in Tiefen bis 1000 m über dem Meeresgrund – sind und erst in der Nähe der Oberfläche differieren.

2.5 Geradlinige Ausbreitung des Schalls mit gemittelter Schallgeschwindigkeit

In diesem Modell wird der Ansatz einer geradlinigen Propagation des Schalls verfolgt. Die Schallgeschwindigkeit ist nicht konstant über die Strecke hinweg, weswegen ein mittlerer Wert für die Schallgeschwindigkeit verwendet wird. Um den Mittelwert zu berechnen, kann die Schallgeschwindigkeiten am Anfang und am Ende des Trajektorienabschnitts, der zwischen dem Emittier und dem Empfänger liegt, verwendet werden.

$$v_m = \frac{v_{\text{anf}} + v_{\text{end}}}{2} \quad (2.42)$$

Alternativ kann ein Polynom 4. Grades $p(z) = az^4 + bz^3 + cz^2 + dz + e$ an die Schallgeschwindigkeitsdaten aus der UNESCO-Formel gefittet und dann den Mittelwert mittels Integral bestimmt werden:

$$v_m = \frac{1}{z_{\text{end}} - z_{\text{anf}}} \int_{z_{\text{anf}}}^{z_{\text{end}}} (az^4 + bz^3 + cz^2 + dz + e) dz \quad (2.43)$$

Dieses Modell ist, aufgrund der simplen Mittelung der Schallgeschwindigkeit, am einfachsten zu behandeln, allerdings scheint die Annahme einer geradlinigen Ausbreitung im Hinblick auf die Kapitel davor eine sehr starke Näherung. Die analytischen Modelle aus den Kapiteln 2.3 und 2.4 gehen, wie die Herleitungen zeigen, von einer gekrümmten Bahn aus. Dennoch sollte dieses Modell Aussicht darauf haben die Position der Empfänger genau zu rekonstruieren. Dies

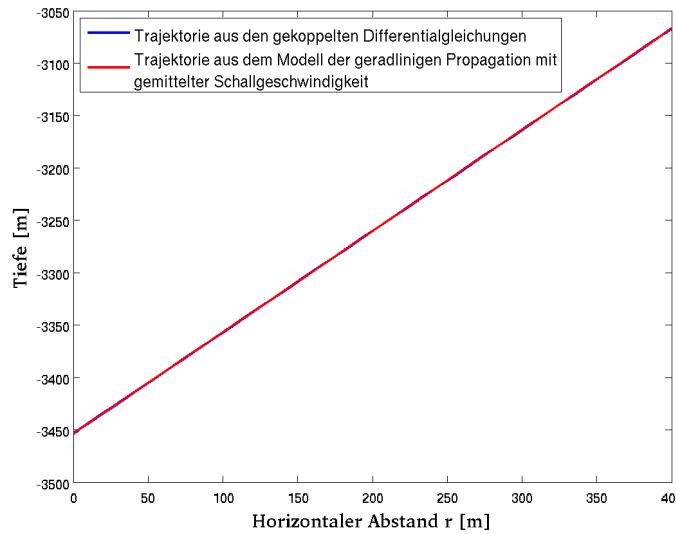


Abbildung 2.11: Vergleich der exakten Trajektorie mit der aus dem Modell der geradlinigen Ausbreitung mit gemittelte Schallgeschwindigkeit bei einem Startwinkel von 74°

liegt daran, dass die Geometrie des Aufbaus von KM3NeT – die Entfernung der Emitter von dem String, sowie der Höhe der DOMs über dem Meeresgrund – dazu führt, dass die Trajektorie nicht sonderlich stark von einer Geraden abweicht, wie in Abbildung 2.11 dargestellt.

Des Weiteren wurde bereits in Kapitel 2.2 diskutiert, dass für große Anfangswinkel, die Änderung des Winkels während der Propagation nicht so groß ist, wie für kleine Anfangswinkel. Der Aufbau des Detektor führt dazu, dass die Startwinkel groß sind. In den folgenden Untersuchungen wurde die mittlere Schallgeschwindigkeit für dieses Modell mit der Gleichung (2.43) berechnet. Die Notwendigkeit des Polynom-Fit und die Vernachlässigung höherer Ordnungen wird später noch erklärt werden.

Kapitel 3

Positionsbestimmung der Detektoren

Die im vorherigen Kapitel beschriebenen Modelle sollen nun hergenommen werden, um Untersuchungen bzgl. der Positionierung der DOMs von KM3NeT durchzuführen. Hierbei müssen die vier Modelle in Matlab implementiert werden. Im Folgenden wird nun die Implementierung des numerisch zu lösenden Falls (Kapitel 2.2), sowie die analytischen Modelle aus den Kapiteln 2.3 bis 2.5 besprochen und die Ergebnisse der Positions kalibrierung der drei analytischen Modelle auf ihre Genauigkeit hin verglichen.

3.1 Implementierung in Matlab

Wie in der Einleitung bereits beschrieben, werden Laufzeitformeln benötigt, die in den Gleichungen (2.35) und (2.41) der beiden analytischen Modelle mit linearen Abhängigkeit der Schallgeschwindigkeit von der Tiefe formuliert wurden. Die Position des Empfängers wird dadurch bestimmt, dass die berechnete Laufzeit zwischen dem Emitter und dem Empfänger gleich der gemessenen Laufzeit sein muss. Dies ist für alle Emitterpositionen der Fall. Die Bedingungen aller Emitter kann in einer Funktion zusammengefasst werden, welche dann minimiert werden muss, wobei das Minimum den Wert Null besitzt.

$$F_1(\mathbf{x}, \mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_n) = \sum_{i=1}^n (T_i(\mathbf{x}, \mathbf{E}_i) - t_i)^2 \quad (3.1)$$

Hierbei ist t_i die gemessene Laufzeit zwischen dem i -ten Emitter und dem Empfänger. $T_i(\mathbf{x}, \mathbf{E}_i)$ bezeichnet jeweils die Laufzeit aus den Gleichungen (2.35) und (2.41), welche von der Position des Empfängers \mathbf{x} und der Position des jeweilig betrachteten Emitters \mathbf{E}_i abhängt. Die Summe geht dabei über n Emitter.

Da für das Modell der geradlinigen Ausbreitung mit gemittelte Schallgeschwindigkeit keine Zeitformel vorhanden ist, wird versucht, die Strecke zwischen der Position des Empfängers und des Emitters so anzupassen, dass sie mit der Strecke identisch ist, die der Strahl geradlinig mit der gemittelten Schallgeschwindigkeit v_m in der gemessenen Zeit zurücklegt. Dies wird in folgender Funktion zusammengefasst:

$$F_2(\mathbf{x}, \mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_n) = \sum_{i=1}^n (|\mathbf{x} - \mathbf{E}_i| - v_m \cdot t_i)^2 \quad (3.2)$$

Dabei ist $|\mathbf{x} - \mathbf{E}_i|$ der Abstand der Empfängerposition \mathbf{x} von der Emitterposition \mathbf{E}_i , d.h. $|\mathbf{x} - \mathbf{E}_i| = \sqrt{(x - E_{i,x})^2 + (y - E_{i,y})^2 + (z - E_{i,z})^2}$. t_i ist wieder die gemessene Laufzeit zwischen i -ten Emitter und dem Empfänger. Die Summe geht ebenfalls über n Emitter.

Für die beiden Funktionen F_1 und F_2 wird numerisch ein Minimum bestimmt sodass das Minimum gefunden wurde, sobald der Wert der Funktionen einen vorgegebenen Wert unterschritten

hat. Die bestimmte Position aus der Minimierungsfunktion würde allerdings selbst dann nicht mit der exakten Position übereinstimmen, wenn die berechneten Zeiten mit den jeweiligen gemessenen Zeiten übereinstimmen, da in den analytischen Modellen bereits Näherungen eingegangen sind. So sind eine lineare z -Abhängigkeit der Schallgeschwindigkeit oder ein gemittelter Wert dieser angenommen worden.

Zunächst wird, wie zuvor bereits erwähnt, die „gemessene“ Laufzeit des Schalls zwischen dem Emitter und dem Empfänger benötigt. Diese wird in Matlab—eine Software zur Lösung mathematischer Probleme— simuliert, wie im folgenden Abschnitt erklärt wird.

3.1.1 Bestimmung der „gemessenen“ Zeit

Wie in Kapitel 2.2 bereits angedeutet, müssen die drei gekoppelten Differentialgleichungen (2.4), (2.5) und (2.6), mit denen die später am Detektor gemessene Laufzeit errechnet werden soll, numerisch gelöst werden, wenn für die Schallgeschwindigkeit die Werte, die aus der UNESCO-Formel stammen, verwandt wurden.

Somit müssen zuerst die Werte für die Schallgeschwindigkeit berechnet werden. Dies geschieht indem die Formel (2.1) implementiert wird, wobei die nötigen Werte für die Temperatur, den Druck und die Salinität aus einer Datei¹ ausgelesen werden, welche Messdaten für den Standort vor Sizilien enthält. Diese Daten werden mit den entsprechenden Daten für die Tiefe verknüpft, sodass die in Abbildung 2.4 gezeigte Geschwindigkeitsverteilung produziert wird. Matlab enthält bereits vordefinierte Funktionen, die Systeme von gekoppelten, gewöhnlichen Differentialgleichungen mit Randbedingungen lösen können. Einer dieser sogenannten „differential equation solver“ ist *bvp4c*, der Differentialgleichungen mit Randbedingungen löst.

Hierfür benötigt *bvp4c* eine kontinuierliche Funktion als Input, welche die Variablen der drei Differentialgleichungen verknüpft. Da jedoch nur diskrete Werte für die Schallgeschwindigkeit in Abhängigkeit von der Tiefe vorhanden sind und diese in der Gleichung (2.4) vorkommen, wobei ebenfalls die Ableitung der Schallgeschwindigkeit bzgl. der z -Komponente benötigt wird, muss das Schallgeschwindigkeitsprofil zwischen den diskreten Werten interpoliert werden. Dazu wird zwischen aufeinanderfolgenden Werten eine lineare Beziehung zwischen Schallgeschwindigkeit und Tiefe gewählt, sodass somit eine kontinuierliche Funktion der Schallgeschwindigkeit in Abhängigkeit von der Tiefe erreicht wird. Die Ableitung der Schallgeschwindigkeitsfunktion ist einfach die Steigung der Interpolationsgeraden im jeweiligen Intervall. Dabei hat die Interpolationsgerade zwischen dem Schallgeschwindigkeitswerten v_i und v_{i-1} folgende Form:

$$v_{\text{int}}(z) = \frac{v_i - v_{i-1}}{d_i - d_{i-1}}z + \frac{v_{i-1}d_i - v_id_{i-1}}{d_i - d_{i-1}} \quad (3.3)$$

Mit d_i und d_{i-1} sind die dazu gehörenden Tiefen, an denen die Messwerte aufgenommen wurden, gemeint. Damit ist es möglich die drei Differentialgleichungen in das Programm zu implementieren. Weiterhin können ganz bestimmte Randbedingungen gewählt werden, sodass die Trajektorie den Empfänger auch wirklich trifft. Hierfür wird zum einen die Anfangsbedingung, dass die Zeit bei der Position des Emitters anfangen soll zu laufen, also $t(0) = 0$ gewählt. Zum anderen wird die Bedingung, dass der Strahl am Emitter anfangen und am Empfänger aufhören soll, verwendet. Dazu werden die Randbedingungen $z(0) = z_{\text{Emitter}}$ und $z(x_1) = z_{\text{Empfänger}}$ gewählt und es wird der Bereich $[0, x_1]$ als Lösungsbereich der Differentialgleichung zugelassen. Die Lösung entspricht dann der später im Betrieb des Detektors gemessene Laufzeit entnommen.

¹Aufgenommen am 5. Mai 2014 bei der geographischen Position $36^{\circ} 17' 48.3099''$ Nord und $15^{\circ} 58' 34.820''$ Ost, zur Verfügung gestellt von G. Riccobene, LNS-INFN Catania

3.1.2 Implementierung der Minimierungsfunktionen

Die Minimierung der Funktionen (3.1) und (3.2) erfolgt durch die in Matlab vordefinierte Funktion *fminsearch*. Mit dieser lassen sich Minima von Funktionen mehrerer Veränderlicher bestimmen, sofern geeignete Startwerte angegeben werden. Hierzu müssen die beiden zu minimierenden Funktionen implementiert werden, wobei die Positionen der Emitter, die gemessene Zeit aus vorhergehenden Abschnitt, sowie die für das jeweilige Modell wichtigen Werte bekannt sein müssen. So ist es für die Modelle aus den Kapiteln 2.3 und 2.4 nötig, die Werte von k und c_0 zu bestimmen. Da diese eine lineare Abhängigkeit der Schallgeschwindigkeit bzgl. der Tiefe annimmt, bietet es sich an, die Werte aus einem linearen Fit an das Schallgeschwindigkeitsprofil, welches man aus der UNESCO-Formel erhält, zu bestimmen. Aus dem Fit über den Tiefenbereich von $[-3453.629m, -2453.629m]$ folgen dann die Werte:

$$k = 0.017451247877 \frac{1}{s} \quad c_0 = 1505.798533196688 \frac{m}{s} \quad (3.4)$$

Diese Werte gelten für das Modell aus Kapitel 2.3. Für das Modell aus 2.4 wurde die Fit-Gerade $c_0 - k(z - z_0)$ gewählt, sodass c_0 die Schallgeschwindigkeit am Meeresgrund in der Tiefe z_0 ist. Diese beträgt damit $1566.0681 \frac{m}{s}$, wohingegen der Parameter k den gleichen Wert wie der für das Modell aus Kapitel 2.3 hat. Für das Modell der geradlinigen Ausbreitung mit der gemittelten Schallgeschwindigkeit ist eben jene Schallgeschwindigkeit noch zu bestimmen. Diese wird mit (2.43) bestimmt, d.h. es wird ein Polynom 4. Grades an die Daten gefittet und dann mit der Gleichung ein Mittelwert berechnet. Damit ermittelt nun *fminsearch* die Position wofür (3.1) und (3.2) sich möglichst nahe an Null annähern sollten.

Aufgrund der stark um den linearen Verlauf in Tiefen unter 1500 m springenden Werte der Schallgeschwindigkeit, ist die Positionskalibrierung nicht ausreichend klein. Der Fehler liegt im Bereich von einigen Metern für jedes der drei Modelle. Um dies zu umgehen, müssen die Daten geglättet werden z.B. mit einem Fit eines Polynom 4. Grades, der bereits für die Berechnung der mittleren Schallgeschwindigkeit verwendet wurde. Da bereits bei den Näherungen für die Modelle, welche analytisch berechnet werden kann, eine lineare z -Abhängigkeit angenommen wurde, scheint die Annahme des Polynoms höheren Grades durchaus gerechtfertigt. Wird nun dieses Polynom für die Schallgeschwindigkeit in den gekoppelten Differentialgleichungen verwendet, aus denen die gemessene Zeit bestimmt wird, sind die Abweichungen der Modelle bei der Positionierung im cm- bzw. mm-Bereich. Wird wie im Kapitel 2.1 die Abweichung der durch den Fit bestimmten Werte von den Werten aus dem UNESCO-Algorithmus für die Schallgeschwindigkeit im Tiefenbereich des Detektors bis 1000 m über dem Meeresgrund betrachtet, folgenden die Werte:

$$\overline{|c_{\text{UNESCO}} - c_{\text{Polynom}}|} = 0.015029 \frac{m}{s} \quad \sigma_{\text{Abweichung}} = 0.010445 \frac{m}{s} \quad (3.5)$$

Die Verteilung der Abweichung wird in Abbildung 3.1 dargestellt. Es reicht bereits ein Polynomfit 3. Grades aus, denn sowohl die mittlere Abweichung, als auch die Standardabweichung verschlechtern sich nur minimal, nämlich nur bzgl. der 5. Nachkommastelle. Auch verbessert ein Polynom 5. Grades die Abweichung nur auf den Wert $0.015024 \frac{m}{s}$, sodass höhere Ordnungen keine große Rolle spielen. Weiterhin kann noch die Abweichung von den berechneten Werten aus der Formel von Del Grossi betrachtet werden, welche eine mittlere Abweichung von $0.05535 \frac{m}{s}$ und eine Standardabweichung von $0.026408 \frac{m}{s}$ zeigt. Der Fehler der für die Messung verwendete Sensoren ist nicht bekannt, aber die Abweichungen des Fittes sind kleiner als die Abweichungen der beiden Methoden zur Bestimmung von der Schallgeschwindigkeit c in (2.2). Damit ist diese Näherung gerechtfertigt.

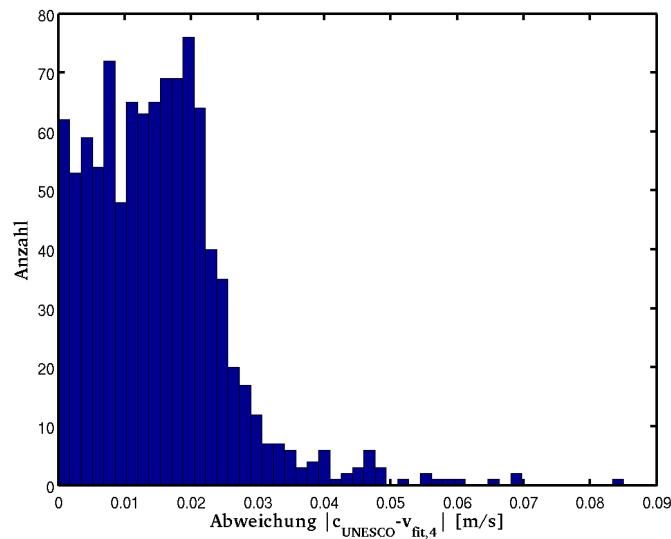


Abbildung 3.1: Abweichung der berechneten Werte mittels UNESCO-Formel (2.1) von den Werten durch den Fit eines Polynom 4. Grades an diesen Schallgeschwindigkeitswerten am Standort Capo Passero von -3453.629 m bis -2453.629 m Tiefe

3.2 Vergleich der Genauigkeit der Modelle

Mit dem im vorherigen Kapitel beschriebenen Programm kann nun für verschiedene Emitterkonstellationen und Empfängerpositionen die Genauigkeit der Positionskalibrierung der drei Modelle verglichen werden. Hierzu wird zunächst untersucht, wie sich die Abweichungen der bestimmten Position verhalten, wenn die Emitter im Mittel 200 m von der (x, y) -Position des Empfängers entfernt sind. Es werden immer der höchste DOM, der 692 m über dem Meeresgrund liegt, und der niedrigste DOM, der nur 80 m über dem Meeresgrund liegt, betrachtet. Für diese Studie wird die folgende Verteilung der Emitter angenommen:

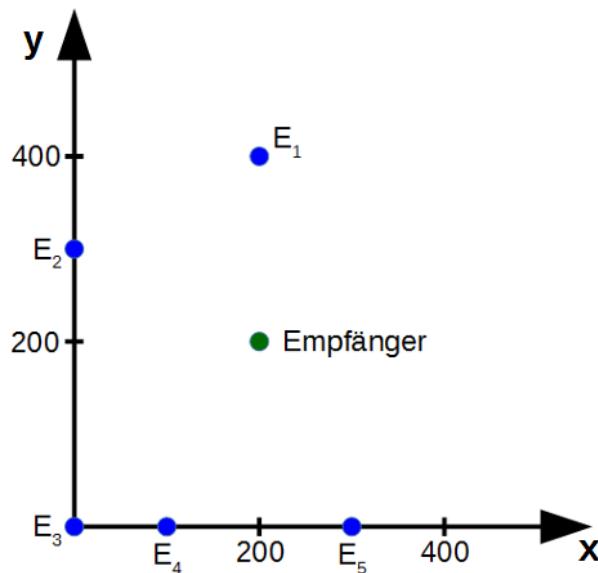


Abbildung 3.2: Emitterkonstellation mit mittlerer Entfernung von 200 m

$$\mathbf{E}_1 = \begin{pmatrix} 200 \\ 400 \\ -3453.629 \end{pmatrix}; \mathbf{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 300 \\ -3453.629 \end{pmatrix}; \mathbf{E}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3453.629 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{E}_4 = \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \\ -3453.629 \end{pmatrix}; \mathbf{E}_5 = \begin{pmatrix} 300 \\ 0 \\ -3453.629 \end{pmatrix}$$

Mit dieser Konfiguration und der exakten Empfängerposition $(200, 200, -2761.629)$ berechnet nun das in Kapitel 3.1.1 und 3.1.2 beschriebene Programm die Laufzeit des Schalls vom Emitter bis zum Empfänger, was der gemessenen Zeit entspricht, und rekonstruiert dann die Position mit den drei analytischen Modellen. Die Ergebnisse dieser Untersuchung sind in Tabelle 3.1 angegeben.

Tabelle 3.1: Vergleich der verschiedenen Modelle zur Positionsbestimmung für Position $(200, 200, -2761.629)$, welche dem höchsten DOM entspricht

	x -Koordinate	y -Koordinate	z -Koordinate
Exakte Position in [m]	200	200	-2761.629
Positionsbestimmung mithilfe gemittelter Schallgeschwindigkeit [m]	200.0026871	200.0018587	-2761.5981392
Positionsbestimmung mithilfe Formel (2.41) von U. Katz [m]	199.8384122	199.8808353	-2759.5032998
Positionsbestimmung mithilfe des Modells aus 2.3 [m]	200.0004187	200.0002882	-2761.6263103
Abweichung des Modells mit gemittelter Schallg. [m]	-0.0026871	-0.0018587	-0.0308608
Abweichung des Modells von U. Katz [m]	0.1615878	0.1191647	-2.1257002
Abweichung des Modells aus Ab. 2.3 [m]	-0.0004187	-0.0002882	-0.0026897

Aus der Tabelle 3.1 ist ersichtlich, dass das Modell mit der linearen z -Abhängigkeit (Positionsbestimmung nach Gl. (2.35)) für die Schallgeschwindigkeit die Position sehr genau bestimmt, da die Abweichung von der exakten Position für die z -Komponente im mm -Bereich liegt und für die anderen Komponenten sogar im Zehntel mm -Bereich. Weiterhin liefert das Modell der geradlinigen Ausbreitung mit gemittelter Schallgeschwindigkeit eine recht gute Positionsbestimmung, da die Abweichung nur im mm -Bereich für die x - und y -Komponente und einige Zentimeter für die z -Koordinate betragen. Trotzdem sind diese um eine Größenordnung schlechter, als das Modell mit der linearen Abhängigkeit der Schallgeschwindigkeit von der Tiefe. Das genährte Modell aus Kapitel 2.4 besitzt allerdings sehr große Abweichungen, die bei der z -Koordinate im m -Bereich liegen. Dies liegt daran, dass bei der ersten Näherung der Differentialgleichung statt der linearen Tiefenabhängigkeit eine konstante Geschwindigkeit c_0 angenommen wird. Diese Geschwindigkeit ist gleich der Schallgeschwindigkeit am Meeresgrund. Jene ist, wie aus Abbildung 2.4 entnommen werden kann, größer als die nachkommenden Geschwindigkeiten in geringerer Tiefe, was dazu führt, dass die Position relativ zum Meeresgrund zu hoch bestimmt wird. Dies ist an dem Wert für die bestimmte z -Koordinate gut zu sehen. Denn dadurch, dass die Schallgeschwindigkeit zu hoch angenommen wird, ist die berechnete Laufzeit mit (2.41) für eine feste Position immer kürzer, als die gemessene Zeit. Damit wird bei der Positionierung, bei der die „gemessene“ Zeit und berechnete Zeit übereinstimmen muss, die Position weiter weg

von den Emittoren gesetzt.

Als nächstes wird mit gleicher Konfiguration der Emitter die exakte Position des untersten Empfängers angesehen, welcher an der Position $(200, 200, -3373.629)$ zu finden ist. Die mit den Modellen für die Schallausbreitung bestimmten Positionen, sowie deren Abweichungen von der exakten Position des DOMs befinden sich in Tabelle 3.2.

Tabelle 3.2: Vergleich der verschiedenen Modelle zur Positionsbestimmung für Position $(200, 200, -3373.629)$, welche dem untersten DOM entspricht

	x -Koordinate	y -Koordinate	z -Koordinate
Exakte Position in [m]	200	200	-3373.629
Positionsbestimmung mithilfe gemittelter Schallgeschwindigkeit [m]	200.0014274	200.0010092	-3373.6128073
Positionsbestimmung mithilfe Formel (2.41) von U. Katz [m]	200.0016847	200.0011718	-3373.5935257
Positionsbestimmung mithilfe des Modells aus Ab. 2.3 [m]	199.9989082	199.9992257	-3373.6416168
Abweichung des Modells mit gemittelter Schallg. [m]	-0.0014274	-0.0010092	-0.0161927
Abweichung des Modells von U. Katz [m]	-0.0016847	-0.0011718	-0.0354743
Abweichung des Modells aus Ab. 2.3 [m]	0.0010918	0.0007743	0.0126168

Auch hier erzielt das Modell aus Kapitel 2.3 die besten Ergebnisse für die Positionierung, aber mit geringerer Genauigkeit, als im Fall des höchsten DOMs. So verschlechtert sich die Genauigkeit für alle drei Koordinaten etwa um eine Größenordnung, befindet sich aber immer noch im Bereich von einigen Zentimetern und darunter, sodass die angestrebte Genauigkeit erfüllt wird. Auf der anderen Seite verbessert sich die Genauigkeit des Modells der geradlinigen Ausbreitung mit gemittelter Schallgeschwindigkeit, wie der Vergleich mit den Werten aus der Tabelle 3.1 zeigt. Ebenfalls hat sich das genäherte Modell von U. Katz dahingehend verbessert, dass nun die Position auf den *cm* bzw. *mm* genau bestimmt wird. Die Besserung der Werte der Positionsbestimmung mit dem Modell der geradlinigen Ausbreitung mit gemittelter Schallgeschwindigkeit liegt zum einen daran, dass aufgrund der kleineren Höhe über dem Meeresgrund die gemittelte Schallgeschwindigkeit von der tatsächlich herrschenden Schallgeschwindigkeit weniger abweicht. Zum anderen, bewirkt die aufgrund des kleineren Anfangswinkels größere Krümmung über Distanzen von nur etwa 200 m in horizontaler Richtung noch keine großen Abweichungen. Die geringe Änderung der Geschwindigkeitswerte ist ebenfalls ein Grund, weshalb das genährte Modell sehr gute Ergebnisse liefert. Die Abweichung der Schallgeschwindigkeit an den Emittoren und am Empfänger ist klein, sodass der Laufzeitfehler klein ist. Der kleinere Laufzeitfehler resultiert aus der kleineren Geschwindigkeitsdifferenz zwischen tatsächlicher und angenommener Schallgeschwindigkeit. Die Verschlechterung des Modells aus 2.3 liegt daran, dass die Krümmung minimal stärker ist, als von der tatsächlichen Trajektorie des Schalls. Somit ist die berechnete Zeit größer, als die tatsächliche Zeit für eine feste Position. Dies führt dazu, dass bei Annäherung der berechneten Zeit und der gemessenen Zeit bei der Minimierung, die Position in größerer Entfernung von den Emittoren gesetzt wird.

Als nächstes ist zu betrachten, wie sich die Positionierung verhält, wenn der Abstand zwischen

Emitter und Empfänger bzgl. der radialen Komponente vergrößert wird. Hierbei sind die Emitter im Mittel 400 m entfernt. Dies wird dadurch erreicht, indem man den „String“ an der Stelle (400, 400) betrachtet und die Emitter wie folgt anordnet:

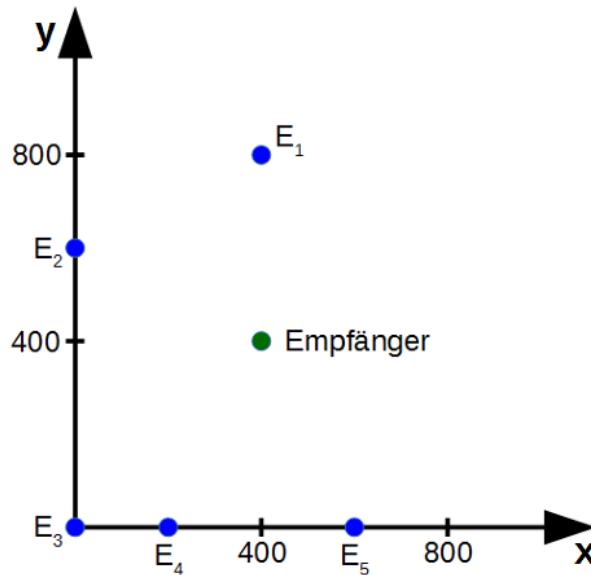


Abbildung 3.3: Emitterkonstellation mit mittlerer Entfernung von 400 m

$$\mathbf{E}_1 = \begin{pmatrix} 400 \\ 800 \\ -3453.629 \end{pmatrix}; \mathbf{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 600 \\ -3453.629 \end{pmatrix}; \mathbf{E}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3453.629 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{E}_4 = \begin{pmatrix} 200 \\ 0 \\ -3453.629 \end{pmatrix}; \mathbf{E}_5 = \begin{pmatrix} 600 \\ 0 \\ -3453.629 \end{pmatrix}$$

Auch hier wird zuerst das oberste DOM betrachtet, der damit die exakten Koordinaten (400, 400, -2761.629) besitzt. Die aus der Positionierung berechneten Standorte, sowie die Abweichung dieser von der exakten Position, finden sich in Tabelle 3.3.

Tabelle 3.3: Vergleich der verschiedenen Modelle zur Positionsbestimmung für Position (400, 400, -2761.629), welche dem höchsten DOM entspricht

	<i>x</i> -Koordinate	<i>y</i> -Koordinate	<i>z</i> -Koordinate
Exakte Position in [m]	400	400	-2761.629
Positionsbestimmung mithilfe gemittelter Schallgeschwindigkeit [m]	400.0051714	400.0035976	-2761.5900619
Positionsbestimmung mithilfe Formel (2.41) von U. Katz [m]	399.9399854	399.9531416	-2759.7873516
Positionsbestimmung mithilfe des Modells aus Ab. 2.3 [m]	400.0010413	400.0007105	-2761.6249450
Abweichung des Modells mit gemittelter Schallg. [m]	-0.0051714	-0.0035976	-0.0389381
Abweichung des Modells von U. Katz [m]	0.0600146	0.0468584	-1.8416484
Abweichung des Modells aus Ab. 2.3 [m]	-0.0010413	-0.0007105	-0.0040550

Es zeigt sich ein ähnliches Bild, wie bei der entsprechenden Untersuchung, als die Emitter noch im Mittel 200 m entfernt waren. So ist das Modell mit der linearen Tiefenabhängigkeit der Schallgeschwindigkeit wieder am genauesten, denn die Position wurde hier für die z -Komponente auf wenige mm und für die radialen Komponenten auf wenige mm und darunter bestimmt. Des Weiteren liegt die Abweichung des Modells mit gemittelte Schallgeschwindigkeit wie im Fall für die Hälfte des radialen Abstands der Emitter zum Empfänger im cm- und mm-Bereich. Auch das dritte Modell zeigt ein ähnliches Verhalten. Der Fehler für die z -Komponente beträgt fast 2 m. Dieses Verhalten ist mit der gleichen Argumentation wie im Fall der mittleren Entfernung von 200 m zu erklären. Durch einen Vergleich der Werte der Abweichungen mit den Abweichungen aus der Position (200, 200, -2761.629), ist zu sehen, dass sich bei den Modellen mit der gemittelten Schallgeschwindigkeit und der linearen Schallgeschwindigkeitsbeziehung die Werte verschlechtert haben. Dies liegt daran, dass sich wegen des längeren Weges, den der Schall zurücklegen muss, um bis zum Empfänger zu kommen, die Diskrepanzen zwischen modellierter und tatsächlicher Schallgeschwindigkeit über die Laufzeit stärker auf die Positionierung auswirken. Das genäherte Modell hingegen hat eine verbesserte Genauigkeit im Vergleich zur analogen Betrachtung aus Tabelle 3.1. Dies liegt daran, dass der Abschusswinkel der Schallwelle im Vergleich zu Tabelle 3.1 kleiner ist, was nach Kapitel 2.2 eine stärkere Krümmung der Bahn zur Folge hat. Dadurch wird die Schallwelle eine längere Strecke im unteren Bereich des Meeres zurücklegen und sich erst später in Richtung Empfänger bewegen. Die Annahme der konstanten Schallgeschwindigkeit c_0 , welche die Schallgeschwindigkeit am Meeresgrund ist, wird bessere Zeiten liefern, als im analogen Fall, wo die tatsächliche Trajektorie direkter in Richtung Empfänger geht.

Zu guter Letzt wird noch der unterste Empfänger bei einer Position (400, 400, -3373.629) betrachtet. Auch hier sind die berechneten Positionen, sowie Abweichungen im Folgenden (Tabelle 3.4) aufgelistet:

Tabelle 3.4: Vergleich der verschiedenen Modelle zur Positionsbestimmung für Position (400, 400, -3373.629), welche dem untersten DOM entspricht

	x -Koordinate	y -Koordinate	z -Koordinate
Exakte Position in [m]	400	400	-3373.629
Positionsbestimmung mithilfe gemittelte Schallgeschwindigkeit [m]	400.0027242	400.0019101	-3373.5989911
Positionsbestimmung mithilfe Formel (2.41) von U. Katz [m]	400.1082526	400.0765266	-3372.5422643
Positionsbestimmung mithilfe des Modells aus Ab. 2.3 [m]	399.9979804	399.9985322	-3373.6715716
Abweichung des Modells mit gemittelte Schallg. [m]	-0.0027242	-0.0019101	-0.0300089
Abweichung des Modells von U. Katz [m]	-0.1082526	-0.0765266	-1.0867357
Abweichung des Modells aus Ab. 2.3 [m]	0.0020196	0.0014678	0.0425716

In diesem Fall können einige Unterschiede zu den Fällen davor beobachtet werden. So ist das Modell mit der linearen Schallgeschwindigkeit genauer in der Positionsbestimmung der x - und y -Koordinate, als das Modell mit der gemittelten Schallgeschwindigkeit, jedoch ungenauer bei der Rekonstruktion der z -Koordinate. Beide Modelle befinden sich wieder im mm bzw. cm-

Bereich. Das dritte Modell positioniert den Empfänger mit einem Fehler größer als 1 m bzgl. der z -Koordinate. Ebenfalls verbessern sich die Fehler auf die einzelnen Koordinaten bei dem Modell mit der gemittelten Schallgeschwindigkeit gegenüber der Messung des höchsten DOMs, wohingegen sich das Modell mit der linearen Schallgeschwindigkeit verschlechtert – bei der z -Position sogar um eine Größenordnung. Das Modell aus Kapitel 2.4 verschlechtert sich in der Positionskalibrierung der x - und y -Koordinate und verbessert sich nur leicht bei der z -Koordinate. Die Verbesserung der geradlinigen Ausbreitung mit gemittelte Schallgeschwindigkeit liegt wieder daran, dass die mittlere Schallgeschwindigkeit näher an der tatsächlichen Schallgeschwindigkeit liegt, da der Empfänger nicht so hoch über dem Meeresgrund liegt. Die Abweichungen sind größer im Vergleich zur Messung bei der die Emitter in etwa 200 m entfernt sind. Dies ist durch die größere Entfernung zwischen Emitter und Empfänger erklärbar, sodass die stärkere Krümmung der exakten Kurve Einfluss auf die Positionierung hat. Das genäherte Modell verbessert sich bzgl. der z -Komponente, da die angenommene Geschwindigkeit aufgrund der geringeren Höhe des Empfängers über dem Meeresgrund eine bessere Näherung ist, als im Fall, wo das DOM mehrere 100 m hoch positioniert ist. Da die Strecke vom Emitter zum Empfänger länger ist, als im Fall mit den halb so weit entfernten Emitter, sind die Fehler wesentlich größer, als im analogen Fall. Die Verschlechterung der Positionsbestimmung mit dem Modell aus Kapitel 2.3 erklärt sich damit, dass die größere Entfernung von Emitter und Empfänger durch Fehler aufgrund der Näherung, welche die Schallgeschwindigkeit als lineare Funktion von z annimmt, die Abweichung von der exakten Position vergrößert.

Kapitel 4

Einbeziehung von systematischen und statistischen Fehlern

Bisher bleiben Fehlerquellen unberücksichtigt, die für die Positionskalibrierung am Detektor von Bedeutung sein könnten. Ein Beispiel Hierfür wäre ein Fehler bei der Zeitmessung, welcher statistisch verteilt sein wird. Weiterhin kann ein systematischer Fehler bei der Bestimmung der Schallgeschwindigkeit durch den UNESCO-Algorithmus angenommen werden. Diese werden im Folgenden untersucht, um den Einfluss auf die Genauigkeit der Positionskalibrierung abzuschätzen.

4.1 Statistische Fehler bei der Zeitmessung

Im vorhergehenden Kapitel 3.2 wurde die Position mithilfe der exakten Zeit bestimmt. Bei einer Positionierung bei KM3NeT selbst ist es prinzipiell nicht möglich, die Zeit beliebig genau zu messen. Weiterhin besitzt jeder Messprozess einen statistischen Fehler. Um nun abschätzen zu können, wie groß dieser Beitrag des statistischen Fehlers bei einer Positionskalibrierung für eine bestimmte Position und Emitterverteilung ist, muss die gleiche Position mehrmals rekonstruiert werden, wobei ein normal-verteilter Fehler auf die Zeitmessung angenommen wird. Dies wird durch das Programm realisiert, indem zur durch den „differential equation solver“ bestimmten Zeit eine Zufallszahl, die aus einer Normalverteilung gezogen wird, welche einen Erwartungswert von 0 hat und eine Standardabweichung von $10\ \mu\text{s}$ besitzt, hinzugaddiert wird. Dieser Wert ist der maximal zu erwartende Zeitfehler. Mit der so bestimmten Zeit mit statistischem Fehler wird wieder der gleiche Algorithmus für die Positionierung ausgeführt. Um nun eine Fehlerverteilung für eine feste Position zu erhalten, muss diese Prozedur häufiger durchgeführt werden. Als Ergebnis erhält man einen gaußverteilten Fehler für die Positionierung. Im Folgenden ist für die verschiedenen Positionen die Verteilung der Fehler auf die einzelnen Koordinaten zusehen, welche durch das Modell aus Kapitel 2.3 entstanden sind. Hierfür wurde die Positionsbestimmung jeweils 500-mal wiederholt. Die Positionen des Empfängers, sowie der Emitter wurden so festgelegt, dass zum einen die Situation untersucht werden kann, wenn die Emitter im Mittel $200\ \text{m}$ entfernt sind. Zum anderen wird die Konstellation verwendet, dass sie $400\ \text{m}$ entfernt sind. Des Weiteren wird noch das System betrachtet, wenn sowohl Emitter vorhanden sind, die $200\ \text{m}$ entfernt sind, als auch, wenn diese $400\ \text{m}$ Entfernung aufweisen.

4.1.1 Emitterkonfiguration mit Entfernungen von $200\ \text{m}$

Für die erste Untersuchung wird die gleiche Emitterkonstellation wie im vorherigen Kapitel, als die Emitter $200\ \text{m}$ vom betrachteten „String“ entfernt waren (Abbildung 3.2), verwendet. Auch hier wird der unterste DOM bei einer Tiefe von $-3373.629\ \text{m}$ betrachtet und es ergibt sich die

in Abbildung 4.1 gezeigte Verteilung der Abweichung von der exakten Position.

Tabelle 4.1: Charakteristische Werte für die Verteilungen der Abweichung der Positionierung von der exakten Position (200, 200, -3373.629)

	<i>x</i> -Koordinate	<i>y</i> -Koordinate	<i>z</i> -Koordinate
Root Mean Square [m]	0.0144332	0.0095046	0.0276881
Erwartungswert [m]	0.0012103	0.0000674	0.0125010
Standardabweichung [m]	0.0143967	0.0094902	0.0247302

Anhand der Grafiken 4.1 und der Tabelle 4.1 ist sehr deutlich zu sehen, dass sowohl die Standardabweichungen, als auch die Mittelwerte der Verteilungen untereinander stark abweichen. So ist der Mittelwert der Abweichung von der exakten *y*-Koordinate am kleinsten, wird also am besten rekonstruiert. Ebenfalls wird die Position bzgl. der *x*-Koordinate im *mm*-Bereich bestimmt. Die Standardabweichung der *x*- und *y*-Koordinate weicht voneinander ab, da σ_x um etwa 0.049 *m* größer ist als σ_y . Die unterschiedlichen Mittelwerte und Standardabweichungen zwischen diesen beiden Fehlerverteilungen sind dadurch zu erklären, dass die Konfiguration der Emitter dazu führt, dass die Positionierung bzgl. der *y*-Komponente deswegen besser ist, da entlang der *y*-Achse mehr Emitter stehen als entlang der *x*-Achse. Dies führt bei der Minimierung der Position dazu, dass etwaige Abweichungen eines in *y*-Richtung liegenden Emitters durch einen anderen in dieser Richtung Liegenden ausgeglichen wird. Weiterhin fällt auf, dass der Mittelwert, wie auch die Standardabweichung der Abweichung vom exakten *z*-Wert des Empfängers größer ist, als diejenigen der *x*-*y*-Ebene. Dies lässt sich ebenfalls durch den Prozess der Minimierung erklären, denn die Verteilung der Emitter hilft dabei die Position in der *x*-*y*-Ebene zu bestimmen. Da hier Emitter vorhanden sind, die in verschiedenen Richtungen um die Position des Empfängers sitzen und Fehler anderer Emitter in entgegengesetzter Richtung ausgleichen können. Bezuglich der *z*-Komponente des DOMs sind alle Emitter auf der gleichen Seite positioniert, sodass Verschiebungen nach oben bzw. unten nicht durch Emitter auf der entgegengesetzten Seite kompensiert werden können. Dennoch sind die Erwartungswerte und Standardabweichungen insgesamt im akzeptablen Bereich von Submillimetern bis hin zu wenigen Zentimetern. Ebenfalls ist anzumerken, dass durch Vergleich mit Tabelle 3.2 ersichtlich ist, dass der Mittelwert der Verteilung sehr nahe (*x*,*y*-Komponente) und sogar kleiner ist, als die Abweichungen ohne Zeitfehler. Diese werden sich mit erhöhter Anzahl an Wiederholungen annähern, da dann die in der Zeitmessung angenommene Normalverteilung, welche den Erwartungswert Null besitzt, sich genauer in der Rekonstruktion der Position ausdrückt. Dies ist demnach kein physikalischer Effekt.

Daraufhin wird nun am gleichen „String“ der höchste DOM bei einer Tiefe von -2761.629 *m* betrachtet. Auch hier sind die Verteilungen der Fehler bzgl. ihrer Koordinaten (Abbildung 4.2), sowie das RMS, der Erwartungswert und die Standardabweichung in der Tabelle 4.2 zu sehen.

Tabelle 4.2: Charakteristische Werte für die Verteilungen der Abweichung der Positionierung von der exakten Position (200, 200, -2761.629)

	<i>x</i> -Koordinate	<i>y</i> -Koordinate	<i>z</i> -Koordinate
Root Mean Square [m]	0.0443998	0.0286314	0.0096886
Erwartungswert [m]	-0.0004754	-0.0024148	-0.0030955
Standardabweichung [m]	0.0444418	0.0285579	0.0091900

In diesem Fall liegt eine andere Konstellation der Mittelwerte und Standardabweichungen vor.

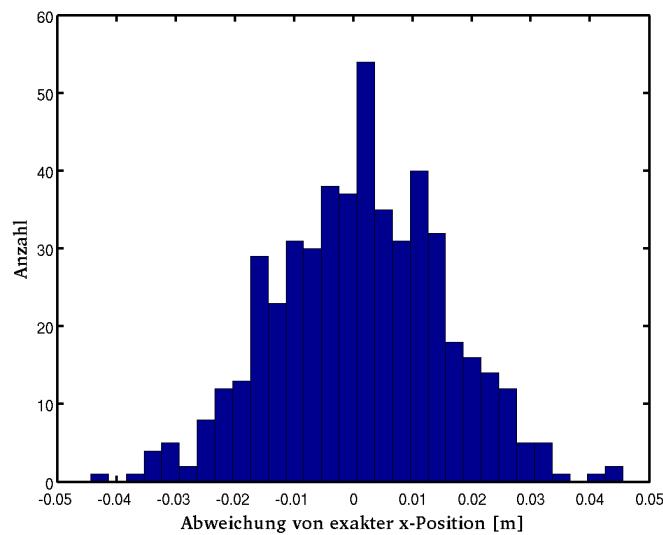
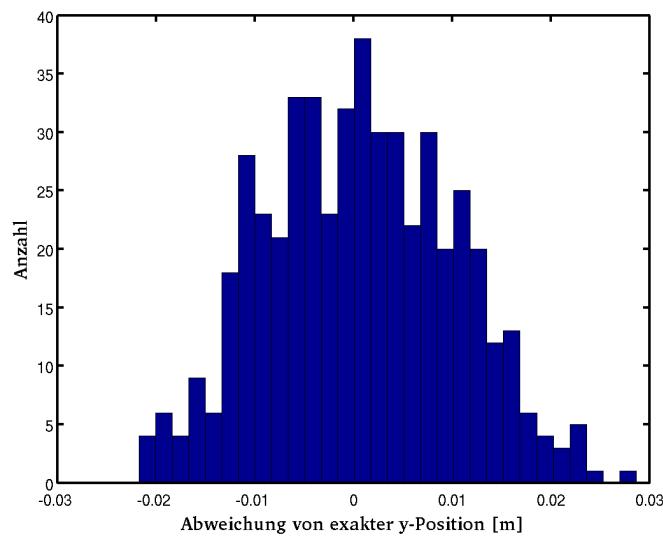
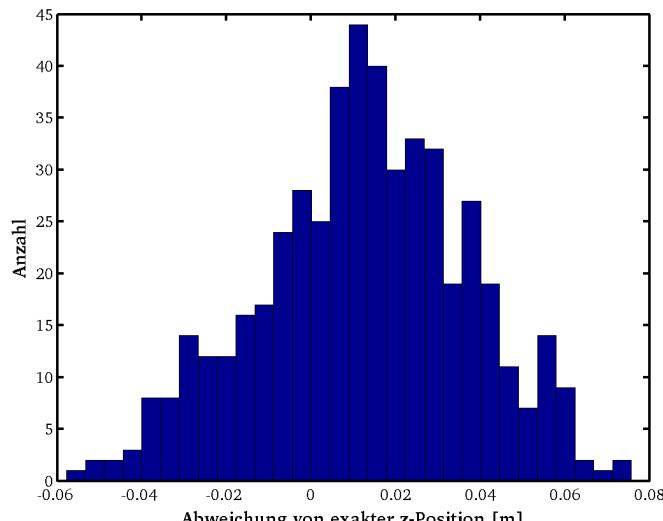
(a) Verteilung des Fehlers bzgl. x -Komponente(b) Verteilung des Fehlers bzgl. y -Komponente(c) Verteilung des Fehlers bzgl. z -Komponente

Abbildung 4.1: Verteilungen der Fehler der Positionierung für Empfänger (200, 200, -3373.629)

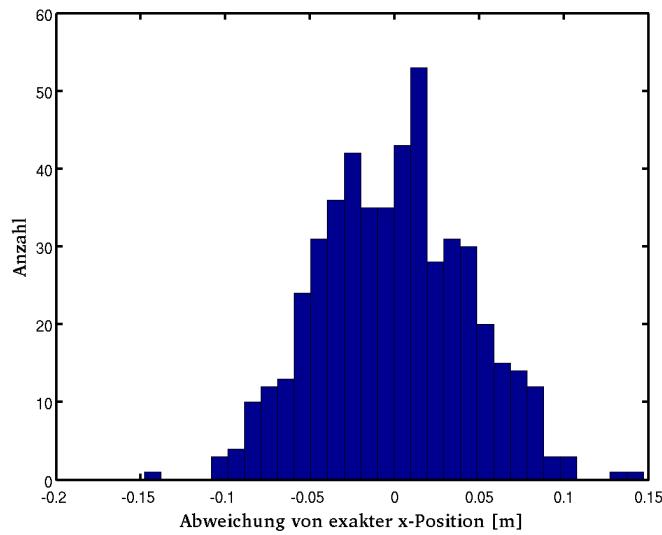
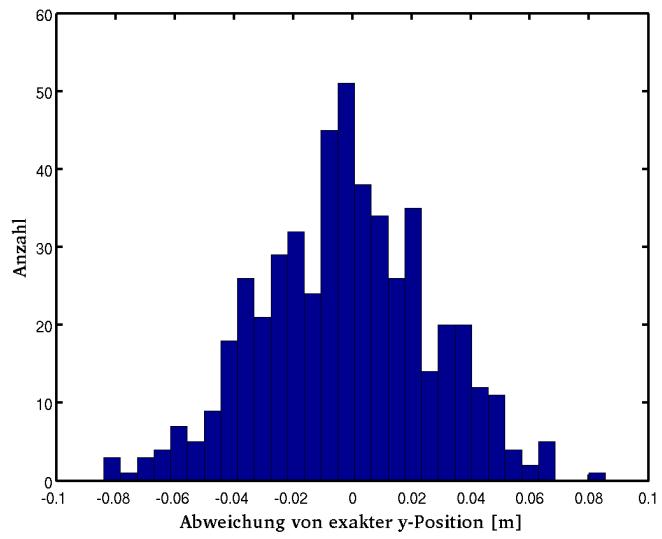
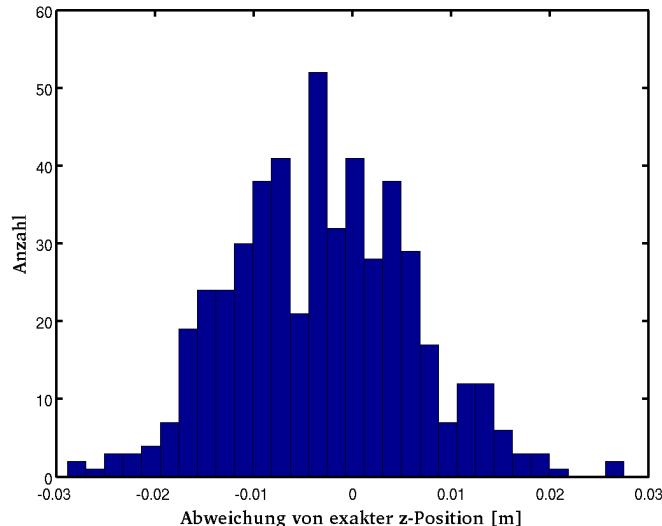
(a) Verteilung des Fehlers bzgl. x -Komponente(b) Verteilung des Fehlers bzgl. y -Komponente(c) Verteilung des Fehlers bzgl. z -Komponente

Abbildung 4.2: Verteilungen der Fehler der Positionierung für Empfänger (200, 200, -2761.629)

So ist hier im Gegensatz zu vorherigen Betrachtung, die Standardabweichung des Fehlers auf die z -Komponente am kleinsten. Darüber hinaus ist sie ebenfalls kleiner als in Tabelle 4.1. Die Erwartungswerte der x - und y -Komponente liegen beide innerhalb des Bereiches des Standardfehlers $\sigma/\sqrt{500}$. Auch die Abweichung zwischen beiden liegt in der gleichen Größenordnung wie der Standardfehler. Jedoch ist die Standardabweichung der y -Komponente kleiner als die der x -Komponente, wobei die Standardabweichung der z -Komponente am kleinsten ist. Dies folgt daraus, dass zu den „gemessenen“ Zeiten verschiedene Zufallszahlen addiert werden, welche sowohl negativ als auch positiv sein können. Damit werden diese nicht einheitlich verlängert oder verkürzt, sodass während der Minimierung die rekonstruierte Position stärker in der x - y -Ebene verschoben wird, als in der z -Richtung. Die kleinere Standardabweichung der z -Komponente resultiert auch aus der in Kapitel 3 erfolgten Untersuchungen, dass das verwendete Modell der linearen Abhängigkeit der Schallgeschwindigkeit von der Tiefe genauer ist für die Positionierung des höchsten DOMs. Grund hierfür ist, wie in Kapitel 3.2 beschrieben, dass die gekrümmtere analytische Kurve im Fall des untersten DOMs eine längere Laufzeit, beschrieben durch Formel (2.35), nach sich zieht. Die größere Standardabweichung bzgl. der x -Koordinate röhrt daher, dass bzgl. der x -Achse weniger Emittoren vorhanden sind, als in Richtung der y -Achse.

4.1.2 Emitterkonfiguration mit Entferungen von 400 m

Eine weiter Situation, die untersucht werden kann, ist wie bei den Tabellen 3.3 und 3.4 gezeigt, wenn die Emittoren im Mittel 400 m entfernt sind. Hierzu wird die gleiche Verteilung der Emittoren verwendet, wie in den Messungen zu den beiden erwähnten Tabellen und setzt die (x, y) -Position des Strings auf (400, 400) (Abbildung 3.3). Zunächst kann wieder der unterste DOM in einer Tiefe von -3373.629 m betrachtet werden, was einer Höhe von etwa 80 m über dem Meeresgrund entspricht. Die dazu gehörenden Verteilungen findet man in der Abbildung 4.3 und die charakteristischen Werte der drei Verteilungen in Tabelle 4.3.

Tabelle 4.3: Charakteristische Werte für die Verteilungen der Abweichung der Positionierung von der exakten Position (400, 400, -3373.629)

	x -Koordinate	y -Koordinate	z -Koordinate
Root Mean Square [m]	0.0134865	0.0091817	0.0637489
Erwartungswert [m]	0.0018109	0.0015974	0.0439383
Standardabweichung [m]	0.0133778	0.0090507	0.0462344

Hier liegt ein ähnlicher Fall vor, wie bei Abbildung 4.1, d.h. die Mittelwerte und Standardabweichungen der Verteilung bzgl. der x - und y -Komponente sind kleiner, als die Mittelwerte und Standardabweichungen der Verteilungen bzgl. der z -Komponente, wobei die Abweichung in der y -Komponente wieder die kleinsten statistischen Werte besitzt. Die Mechanismen, die das erklären, sind die gleichen, wie bei der Betrachtung des DOMs an der Position (200, 200, -3373.629). So ist die kleinere Standardabweichung des Fehlers auf die y -Koordinate durch die Konfiguration der Emittoren zu erklären, da in y -Richtung mehr Emittoren stehen, als in x -Richtung. Ebenso ist der Mittelwert und die Standardabweichung der Abweichung vom exakten z -Wert des Empfängers dadurch zu erklären, dass in z -Richtung des DOMs alle Emittoren auf der gleichen Seite sitzen, sodass die Position eher nach oben bzw. unten gesetzt wird. Weiterhin zeigt ein Vergleich mit den Werten aus 4.1, dass die Standardabweichungen der x - und y -Komponente für den Fall kleiner sind, dass die Emittoren im Mittel 400 m entfernt sind. Die Standardabweichung der z -Komponente ist fast doppelt so groß, wie diejenige aus Tabelle 4.1. Dies kommt daher, dass aufgrund der größeren Entfernung die Krümmung der echten Laufbahn des Schalls stärker ins Gewicht fällt, sodass sich dies vor allem bzgl. der z -Komponente zeigt. Dieser Mechanismus hat ebenfalls zur Folge, dass die Erwartungswerte schlechter sind, als die im Fall der 200 m entfernt-

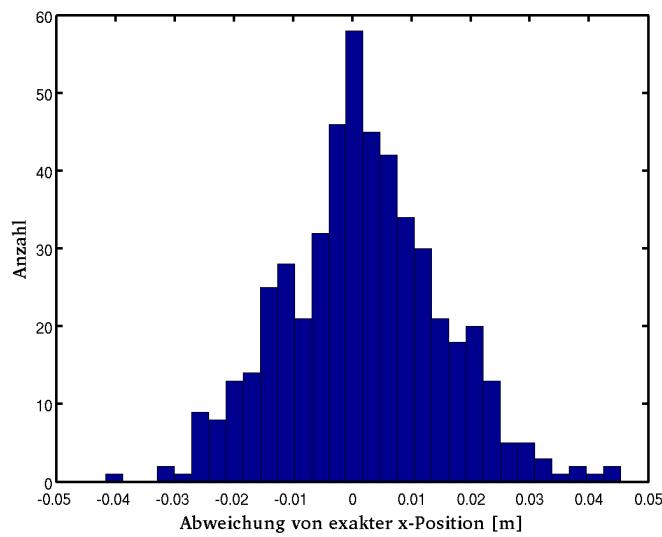
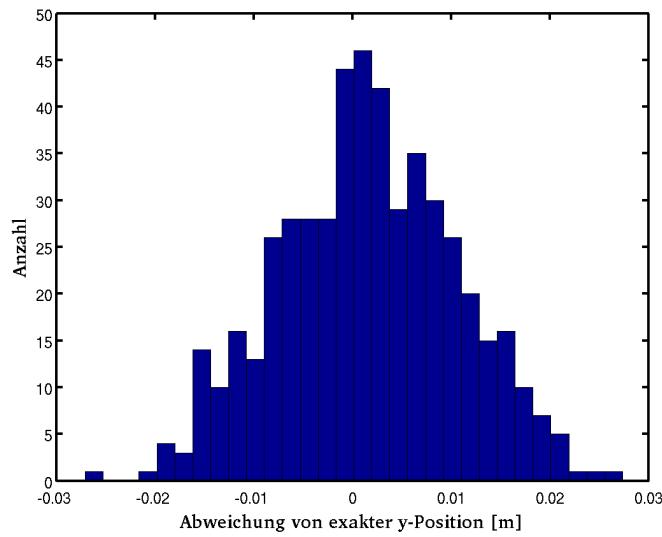
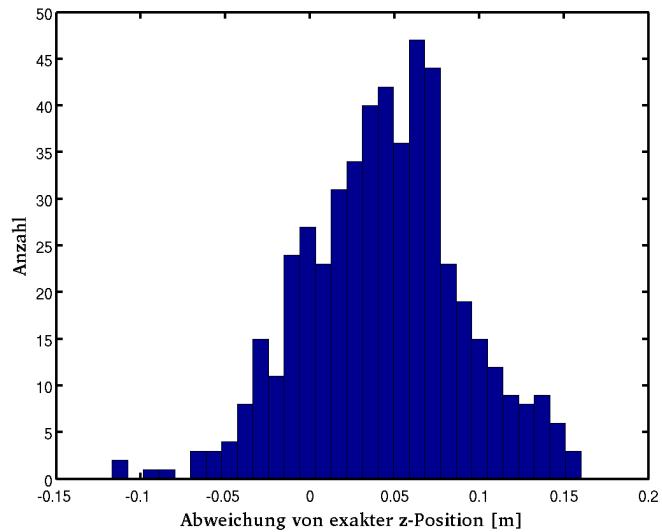
(a) Verteilung des Fehlers bzgl. x -Komponente(b) Verteilung des Fehlers bzgl. y -Komponente(c) Verteilung des Fehlers bzgl. z -Komponente

Abbildung 4.3: Verteilungen der Fehler der Positionierung für Empfänger (400, 400, -3373.629)

ten Emitter. Dieses Verhalten hat sich schon bei den Messungen ohne einen statistischen Fehler gezeigt. Die Verschiedenheit der Erwartungswerte bei dieser und bei der analogen Messung ohne den statistischen Zeitfehler röhrt daher, dass eine endliche Wiederholung der Messung zu einem leicht abweichenden Erwartungswert der Verteilung führt. Dieser abweichende Erwartungswert wird sich aber mit steigender Wiederholung an die entsprechenden Werte aus Tabelle 3.3 annähern.

Als nächstes wird wieder der höchste DOM, der 692 m über dem Meeresgrund liegt, betrachtet. Hierbei ergeben sich die in Abbildung 4.4 gezeigten Verteilungen und die in Tabelle 4.4 aufgelisteten Werte.

Tabelle 4.4: Charakteristische Werte für die Verteilungen der Abweichung der Positionierung von der exakten Position $(400, 400, -2761.629)$

	x -Koordinate	y -Koordinate	z -Koordinate
Root Mean Square [m]	0.0242079	0.0175024	0.01027121
Erwartungswert [m]	-0.0009529	-0.0011375	-0.0034999
Standardabweichung [m]	0.0242133	0.01748285	0.0096662

Auch hier zeigt sich ein ähnliches Verhalten der Erwartungswerte und der Standardabweichungen, wie beim höchsten DOM an der Position $(200, 200, -2761.629)$. Die Erklärung ist damit ähnlich, d.h. auch hier überwiegt der Effekt, dass durch die Addition von Zeitfehlern auf die „gemessene“ Zeit eine Verschiebung in x - y -Richtung stärker ausfällt, als in z -Richtung. Des Weiteren liegt die Verbesserung der Standardabweichung im Vergleich zur Messung an Position $(200, 200, -2761.629)$, bei der die Emitter im Mittel 200 m entfernt sind, daran, dass die Krümmung der tatsächlichen Trajektorie des Schalls näher an der des Modells liegt. Die Abweichungen zwischen den Standardabweichungen der x - und y -Koordinate ergibt sich wieder durch die Anordnung der Emitter, die Abweichungen aufgrund des Zeitfehlers in y -Richtung besser kompensieren können.

4.1.3 Emitterkonstellation mit Entfernungen von 200 m und 400 m

Als letztes ist noch eine gemischte Konstellation zu betrachten, bei der einige Emitter etwa 200 m und andere 400 m entfernt sind. In den folgenden zwei Messungen wurde diese Verteilung verwendet:

$$\mathbf{E}_1 = \begin{pmatrix} 400 \\ 800 \\ -3453.629 \end{pmatrix}; \mathbf{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 600 \\ -3453.629 \end{pmatrix}; \mathbf{E}_3 = \begin{pmatrix} 200 \\ 300 \\ -3453.629 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{E}_4 = \begin{pmatrix} 200 \\ 0 \\ -3453.629 \end{pmatrix}; \mathbf{E}_5 = \begin{pmatrix} 600 \\ 400 \\ -3453.629 \end{pmatrix}$$

Dabei befindet sich der zu untersuchende „String“ an der Stelle $(400, 400)$. Zunächst wird wieder der unterste Empfänger betrachtet, sodass folgende Verteilungen herauskommen (siehe Abbildung 4.6). Die Werte für das Root Mean Square, den Erwartungswert und die Standardabweichung der Normalverteilungen sind in der Tabelle 4.5 aufgelistet.

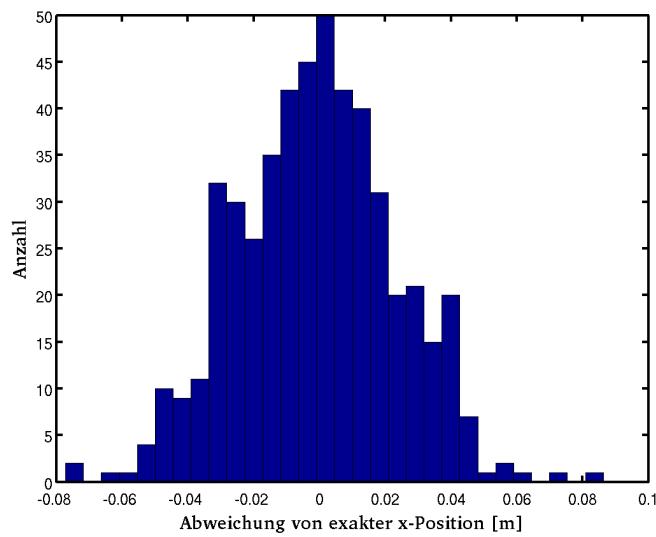
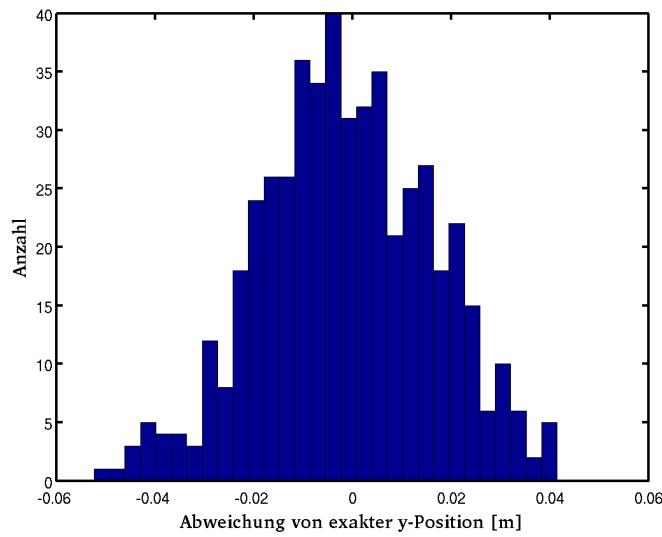
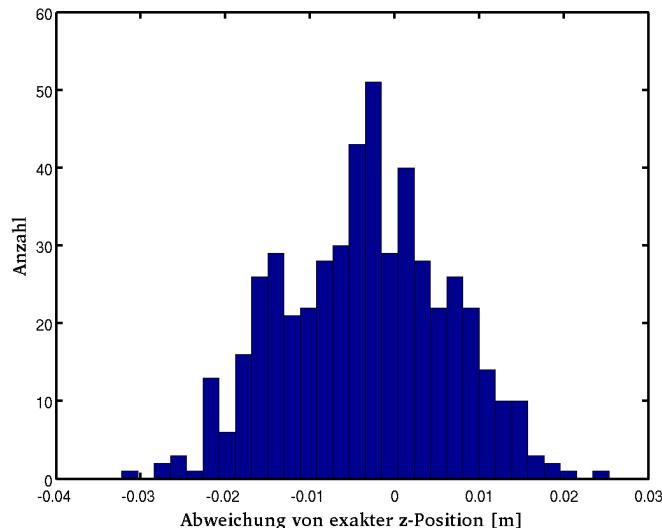
(a) Verteilung des Fehlers bzgl. x -Komponente(b) Verteilung des Fehlers bzgl. y -Komponente(c) Verteilung des Fehlers bzgl. z -Komponente

Abbildung 4.4: Verteilungen der Fehler der Positionierung für Empfänger (400, 400, -2761.629)

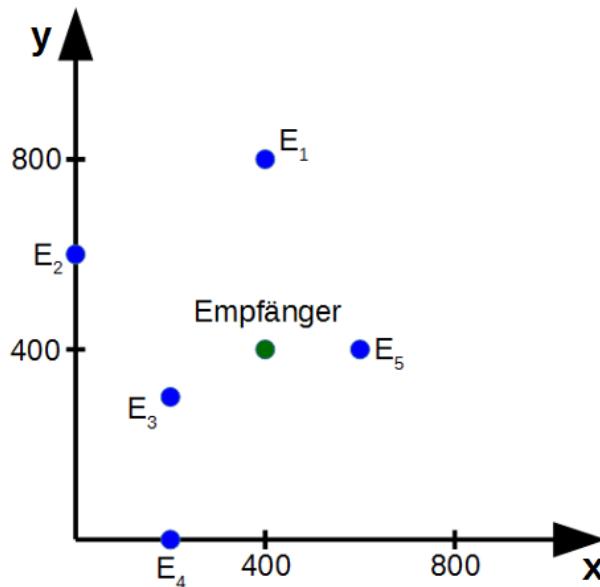


Abbildung 4.5: Emitterkonstellation mit Entfernungen von 200 m und 400 m

Tabelle 4.5: Charakteristische Werte für die Verteilungen der Abweichung der Positionierung von der exakten Position (400, 400, -3373.629) mit gemischten Emitterpositionen

	x-Koordinate	y-Koordinate	z-Koordinate
Root Mean Square [m]	0.0109596	0.0113448	0.0336060
Erwartungswert [m]	0.0032967	-0.0018774	0.0208010
Standardabweichung [m]	0.0104625	0.0111996	0.0264212

Auch in diesem Fall sind der Mittelwert und die Standardabweichung der Abweichung von der exakten z -Position am größten. Dies resultiert wieder aus der Konstellation, dass alle Emittoren auf einer Seite in z -Richtung liegen. Hier ist zu sehen, dass die Standardabweichungen der x - und y -Koordinate – im Gegensatz zu den Fällen davor – nur gering abweichen. Dies folgt aus der neuen Anordnung der Emittoren, wie in Abbildung 4.5 zusehen ist, sodass nun entlang der x - und in y -Achse etwa gleich viele Emittoren vorhanden sind, die etwaige Fehler durch den statistischen Fehler auf die „gemessene“ Zeit ausgleichen können. Durch den Vergleich der Standardabweichungen aller Untersuchungen für den untersten Empfänger kann gezeigt werden, dass die Standardabweichung bzgl. der x -Komponente für die gemischte Konstellation am besten abschneidet. Bei den anderen beiden Modellen ist die Emittorenkonstellation, die im Mittel 400 m bzw. diejenige, die im Mittel 200 m entfernt ist, genauer. Doch insgesamt sind die Standardabweichung bzgl. der x - und y -Koordinate vergleichbar, denn die radiale Standardabweichung $\sigma_r = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$ beträgt 0.0159 m für den Fall mit der gemischten Emittorenkonstellation, wohingegen für den Fall aus Tabelle 4.1 dies 0.0172 m und für Tabelle 4.3 0.0162 m beträgt. Der Fall, dass Emittoren, die 200 m entfernt sind, vorhanden sind, bedingt eine kleinere Standardabweichung bzgl. der z -Koordinate wie im Fall der Tabelle 4.1.1.

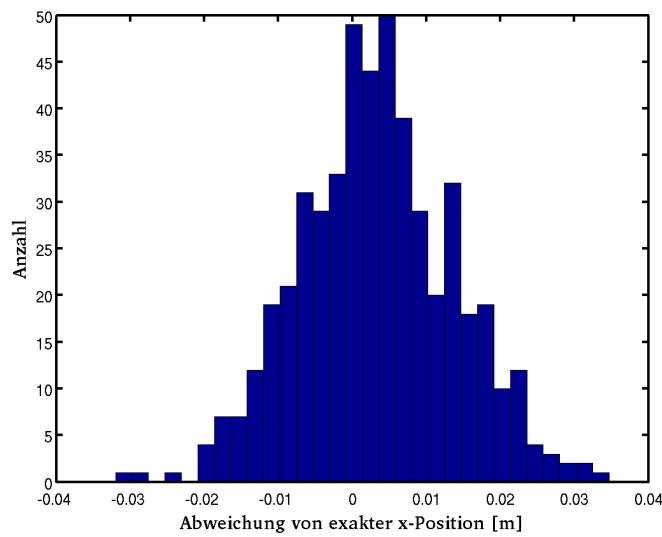
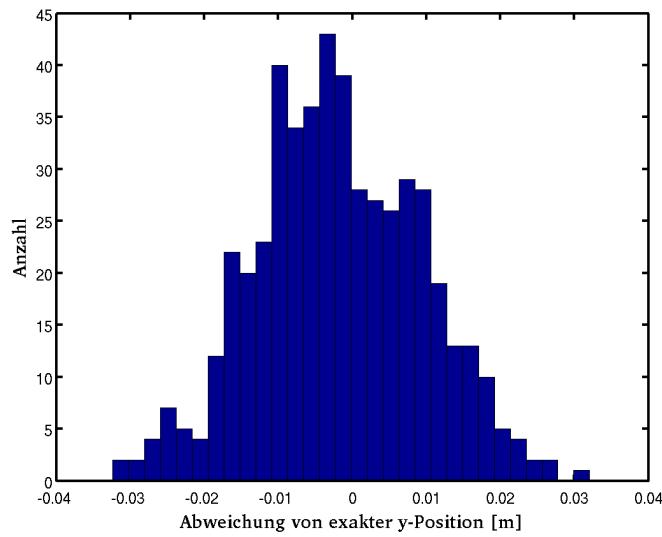
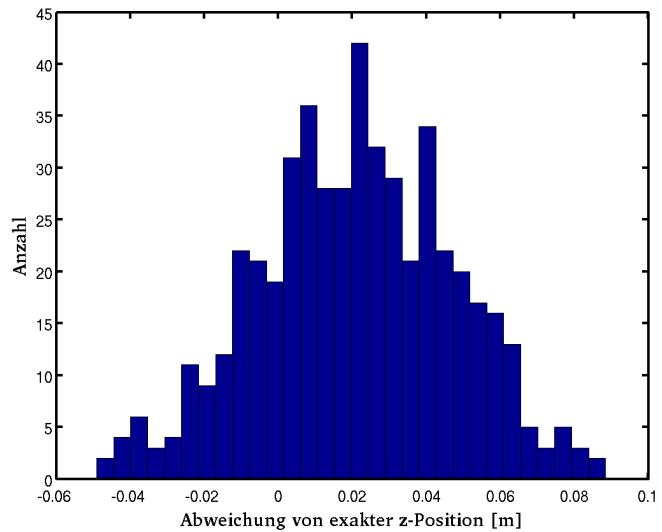
(a) Verteilung des Fehlers bzgl. x -Komponente(b) Verteilung des Fehlers bzgl. y -Komponente(c) Verteilung des Fehlers bzgl. z -Komponente

Abbildung 4.6: Verteilungen der Fehler der Positionierung für Empfänger $(400, 400, -3373.629)$ mit Emitter in 200 m und 400 m Entfernung

Schließlich wird noch das Verhalten der Abweichung von der exakten Position am höchsten Empfänger betrachtet. Hierzu sind die Verteilungen in der Abbildung 4.7 und die dazu gehörigen charakteristischen Werte in Tabelle 4.6 angegeben.

Tabelle 4.6: Charakteristische Werte für die Verteilungen der Abweichung der Positionierung von der exakten Position (400, 400, -2761.629) mit gemischten Emitterpositionen

	x -Koordinate	y -Koordinate	z -Koordinate
Root Mean Square [m]	0.0264687	0.0202875	0.0096579
Erwartungswert [m]	-0.0007092	-0.0007587	-0.0040181
Standardabweichung [m]	0.0264857	0.0202936	0.0087912

Auch in diesem Fall sind Parallelen zu den bereits getätigten Messungen zu finden. So zeigt die Tabelle 4.6, dass die Standardabweichung des Fehlers auf die exakte z -Position am kleinsten ist. Dies folgt aus der Addition des Zeitfehlers, welche die verschiedenen Laufzeiten aufgrund des zufälligen Ziehens unterschiedlich erhöht oder erniedrigt, der zu einer Verschiebung der (x, y) -Position führt. Ebenfalls ist zu sehen, dass aufgrund der neuen Verteilung die Standardabweichungen der x - und y -Koordinate nicht mehr so stark differieren.

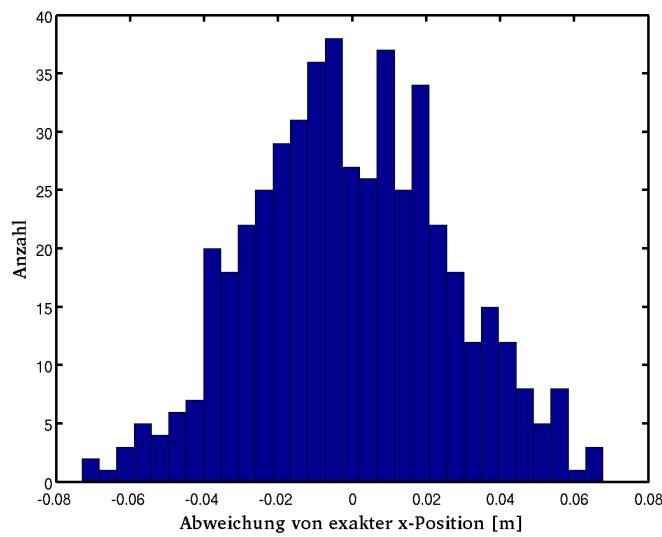
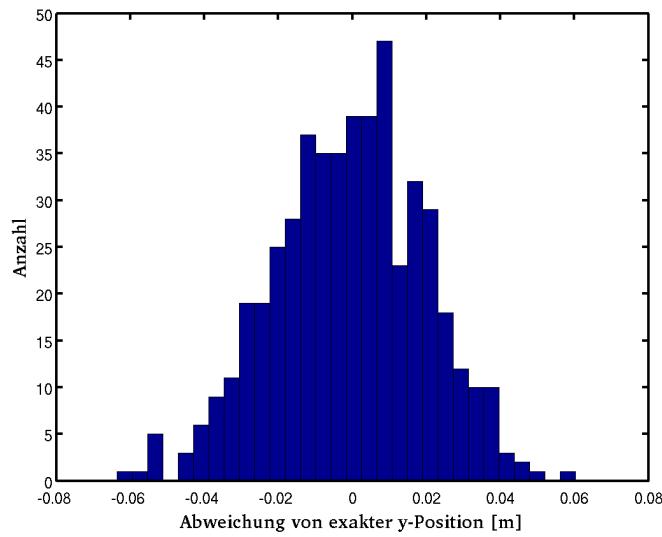
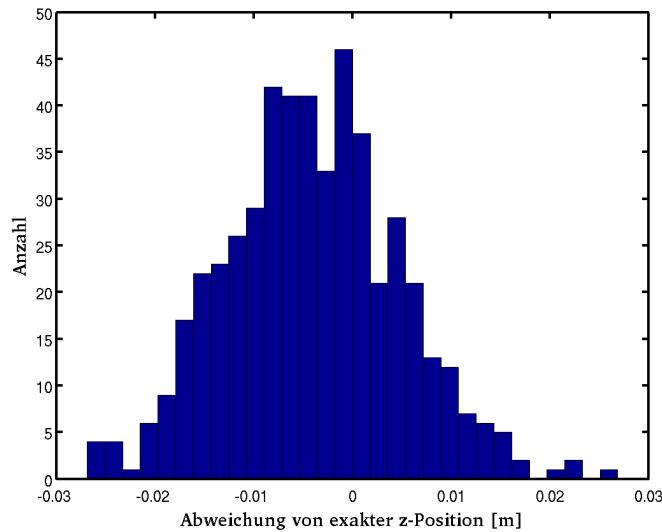
(a) Verteilung des Fehlers bzgl. x -Komponente(b) Verteilung des Fehlers bzgl. y -Komponente(c) Verteilung des Fehlers bzgl. z -Komponente

Abbildung 4.7: Verteilungen der Fehler der Positionierung für Empfänger $(400, 400, -2761.629)$ mit Emitter in 200 m und 400 m Entfernung

Durch den Vergleich der Standardabweichungen der drei Koordinaten aus den analogen Messungen für die beiden anderen Emitterkonstellationen und der Berechnung der Standardabweichung σ_r für den radialen Abstand von der Position des „Strings“, zeigt sich, dass nach der Konstellation aus Tabelle 4.4 mit 0.0299 m die gemischte Konstellation der Emitter mit 0.0334 m und dann mit 0.0528 m kommt. Darüber hinaus hat die gemischte Emitterkonstellation die kleinste Standardabweichung bzgl. der z -Komponente.

Abschließend kann nun aus den Ergebnissen geschlossen werden, dass der Fehler aufgrund des statistisch verteilten Fehlers auf die später im Betrieb des Detektors gemessene Zeit bei wenigen Zentimetern und darunter liegt. Weiterhin zeigt sich, für die in dieser Arbeit verwendeten Emitterkonstellationen, dass die besten Ergebnisse für die Positionierung mit einer gemischten Emitterkonstellation erzielt werden.

4.2 Systematischer Fehler bei der Bestimmung der Schallgeschwindigkeit

Weiterhin kann ein systematischer Fehler angenommen werden, der aus der Berechnung der Schallgeschwindigkeit mittels des UNESCO-Algorithmus herröhrt, da dieser ebenfalls nie die exakte Geschwindigkeit ausgeben kann. Dieser systematische Fehler überträgt sich auch durch den Fit für die Glättung der Daten auf die Bestimmung der gemessenen Zeit aus Kapitel 3.1.1. Ebenso überträgt er sich auf die analytischen Modelle, da diese ebenfalls durch einen Fit an die Schallgeschwindigkeitsdaten wie bei den Modellen aus Kapitel 2.3 und 2.4 bestimmt werden. Auch beim Modell mit der gemittelten Schallgeschwindigkeit gehen systematische Fehler durch die Mittelung ein. Um diesen Fehler in das bestehende Programm zu integrieren, wurde zu den aus der UNESCO-Formel gewonnenen Schallgeschwindigkeiten ein konstanter Faktor von $1.5 \frac{m}{s}$ dazu addiert. Dies entspricht einem Fehler von einem Tausendstel der Schallgeschwindigkeit. Ebenfalls wird der statistische Fehler auf die Zeitmessung wie im Abschnitt davor weiter berücksichtigt. Damit wird nun der Frage nachgegangen, ob ein systematischer Fehler auf der Bestimmung der Schallgeschwindigkeit durch verschiedene Konfiguration der Emitter beobachtet werden kann. Hierfür wird im Programm zuerst erneut für sechs Emitterpositionen die gemessene Zeit simuliert, jedoch mit Schallgeschwindigkeitswerten, welche den systematischen Fehler besitzen, und mit einer „gemessenen“ Zeit mit dem statistischen Zeitfehler. Die Emitter sind hierbei wie folgt angeordnet:

$$\mathbf{E}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 300 \\ -3453.629 \end{pmatrix}; \mathbf{E}_2 = \begin{pmatrix} 150 \\ 400 \\ -3453.629 \end{pmatrix}; \mathbf{E}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3453.629 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{E}_4 = \begin{pmatrix} 300 \\ 0 \\ -3453.629 \end{pmatrix}; \mathbf{E}_5 = \begin{pmatrix} 400 \\ 400 \\ -3453.629 \end{pmatrix}; \mathbf{E}_6 = \begin{pmatrix} 450 \\ 100 \\ -3453.629 \end{pmatrix};$$

Der Empfänger besitzt die Position $(200, 200, -2761.629)$. Mit der simulierten Laufzeit der

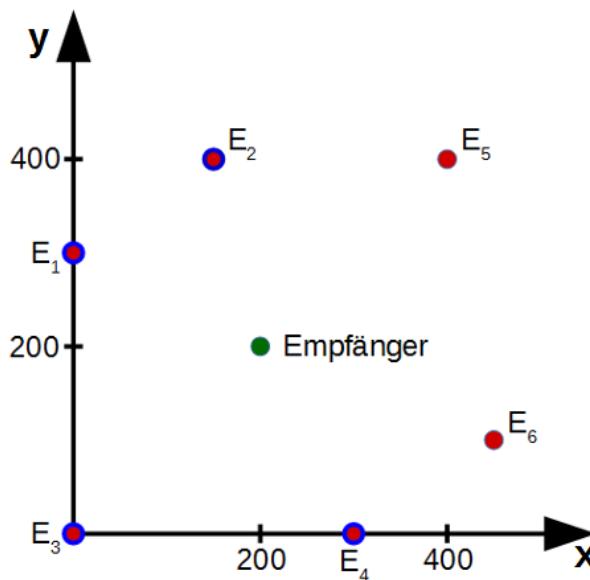


Abbildung 4.8: Emitterkonstellation für Rekonstruktion des Empfängers: (Rot) Positionen der sechs Emitter; (Blau) Positionen der vier Emitter

Schallwelle, die einen statistischen Fehler sowie einen systematischen Fehler enthält, wird nun

Tabelle 4.7: Charakteristische Werte der beiden Rekonstruktionen für einen Zeitfehler von $10\ \mu\text{s}$ und einen systematischen Fehler von 1% der Schallgeschwindigkeit mit Emitter, die im Mittel $200\ \text{m}$ entfernt sind

	6 Emitter			4 Emitter		
	x -Komp.	y -Komp.	z -Komp.	x -Komp.	y -Komp.	z -Komp.
Root Mean Square	0.028500	0.050247	0.746189	0.085073	0.069859	0.730157
Mittelwert	0.007213	-0.042461	-0.746156	-0.074174	-0.062055	-0.730085
Standardabweichung	0.027642	0.026934	0.006790	0.041765	0.032164	0.010274

zweimal die Position des Empfängers bestimmt. Zum einen erfolgt die Bestimmung mit allen sechs Emitter und danach mit vier Emitter, wobei \mathbf{E}_5 und \mathbf{E}_6 weggelassen werden. Der systematische Fehler sollte nun durch eine Verschiebung der rekonstruierten Position beobachtbar sein. Hierzu wird in Grafik 4.9 sowohl die Verteilung der Abweichung von der exakten Komponente für sechs Emitter, als auch für vier Emitter gezeigt. Des Weiteren finden sich in Tabelle 4.7 die Werte des RMS, des Mittelwerts und der Standardabweichung für die beiden Rekonstruktionen mit verschiedener Emittanzahl. Zunächst ist in den Abbildungen eine Verschiebung der rekonstruierten Position zu beobachten. Die beiden Koordinaten x und y können zusammengefasst werden, indem nur die radiale Komponente $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ betrachtet wird. Damit können die Mittelwerte der radialen Komponente beider Verteilungen bestimmt werden, sodass man den radialen Abstand beider Verteilungen berechnen kann. Weiterhin ergibt die Gleichung $\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$ die Standardabweichung der radialen Komponente. Somit beträgt die radiale Standardabweichung σ_r für die Rekonstruktion mit sechs Emittoren $0.038594\ \text{m}$ und für vier $0.052715\ \text{m}$. Der Abstand der beiden radialen Mittelwerte beträgt $0.05364\ \text{m}$. Durch den Vergleich des Abstandes mit den beiden Standardabweichungen folgt, dass dadurch, dass der Abstand größer als beide Standardabweichungen ist, die beiden Verteilungen später im Experiment unterschieden werden können. Ebenfalls ist der Abstand der Mittelwerte der rekonstruierten z -Position mit seinem Wert von $0.016071\ \text{m}$ größer als beide Standardabweichungen der z -Positionenverteilung. Auch hier kann man mit großer Gewissheit sagen, dass die Aufspaltung zu sehen sein wird. Diese Methode scheint also ein guter Indikator zu sein, um aufzudecken ob bei der Positionierung eine Schallgeschwindigkeit mit einem systematischen Fehler verwendet wurde.

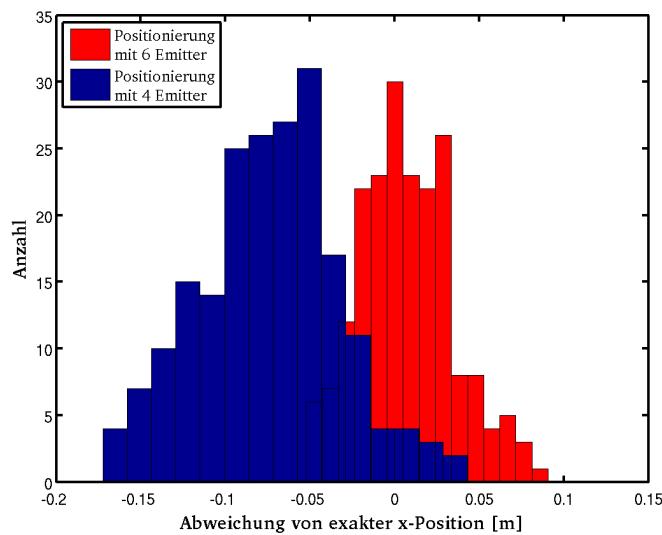
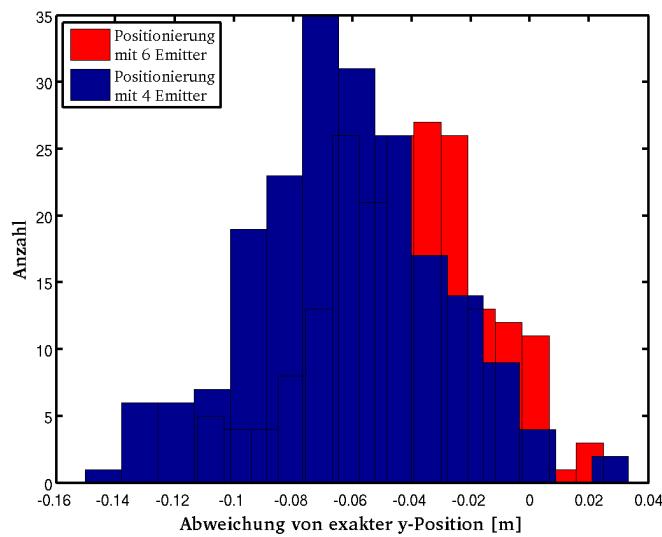
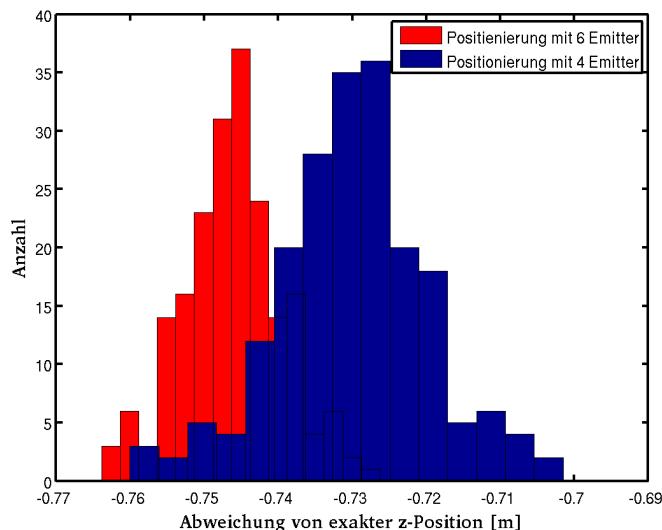
(a) Verteilung des Fehlers bzgl. x -Komponente(b) Verteilung des Fehlers bzgl. y -Komponente(c) Verteilung des Fehlers bzgl. z -Komponente

Abbildung 4.9: Verschiebung der rekonstruierten Position unter Verwendung unterschiedlicher Anzahl an Emittoren, welche im Mittel ca. 200 m vom „String“ entfernt sind

Kapitel 5

Fazit

In dieser Arbeit wurden zunächst drei Modelle beschrieben, die für eine Positionskalibrierung eines Unterwasser-Cherenkov Neutrinoleskops verwendet werden können. Für jedes dieser Modelle wurde ein Schallgeschwindigkeitsprofil benötigt, das wie sich zeigte, allerdings möglichst glatt sein muss, um zufriedenstellende Abweichungen von der exakten Position zu erzielen. Die Glättung wurde mit einem Fit eines Polynom 4. Grades an diese Daten aus dem UNESCO-Algorithmus erreicht.

Weiterhin hat sich gezeigt, dass das Modell aus Kapitel 2.3 die besten Ergebnisse erzielt, sowohl wenn die Emitter im Mittel 200 m als auch wenn sie 400 m entfernt sind. Die Position wird immer auf wenige Zentimeter bis Millimeter genau bestimmt, was dem in der Einleitung erwähnten Ziel entspricht. Ebenfalls erfüllt das Modell mit der geradlinigen Ausbreitung mit gemittelte Schallgeschwindigkeit das Ziel, dass die DOM-Position auf einige Zentimeter genau bestimmt werden soll. Das genäherte Modell aus Kapitel 2.4 erfüllt dies jedoch nicht, da für Empfängerpositionen in der Nähe des höchsten DOMs bei -2761.629 m Tiefe bzw. bei Abständen von 400 m vom String der Fehler bzgl. der z -Koordinate im m -Bereich liegt.

Unter Verwendung des Modells mit der linearen Abhängigkeit der Schallgeschwindigkeit von der Tiefe verschlechtert die Annahme eines normal-verteilten Messfehlers der Laufzeit die Positionierung nicht zu stark. So sind die Standardabweichungen wieder im Zentimeterbereich und überschreiten die 5 cm nicht, sodass auch mit statistischen Zeitfehlern das Ziel erfüllt werden kann. Ebenfalls hat sich gezeigt, dass für die verwendeten Emitterkonstellationen eine gemischte Konstellation von zum Teil 200 m und zum Teil 400 m weit entfernten Emittoren die kleinste Standardabweichung bzgl. des höchsten und tiefsten DOM erzielt.

Wird mit dem gleichen analytischen Modell noch ein systematischer Fehler für die Schallgeschwindigkeit betrachtet, so ist zusehen, dass dieser in einer Verschiebung der Position bei unterschiedlicher Anzahl von Emitter bei der Rekonstruktion resultiert. Diese Untersuchung ist durchaus wichtig, da die Abweichung von der exakten Position des DOMs durch den systematischen Fehler anwächst. So beträgt die Abweichung einen halben Meter bzgl. der z -Komponente für Emittoren, die 200 m entfernt sind. Somit ist es durchaus wichtig zu erkennen ob ein Fehler bzgl. der Schallgeschwindigkeit vorliegt. Die Untersuchung zeigt, dass dies für den statistischen Zeitfehler und einem systematischen Fehler von $1.5\frac{\text{m}}{\text{s}}$ erkannt werden kann.

Eine Möglichkeit des weiteren Vorgehens in der Untersuchung des Einflusses verschiedener Modelle für die Unterwasserschallausbreitung könnte darin bestehen, dass die Zackenbewegung der Geschwindigkeitswerte aus dem UNESCO-Algorithmus durch mehrere Messungen der Druck-, Temperatur- und Salinitätsprofile minimiert werden, sodass eine weitere Näherung (hier durch

den Fit des Polynom 4. Grades) nicht notwendig wird.

Ein weiteres Untersuchungsfeld ist, ob aus der Verschiebung der rekonstruierten Position durch den systematischen Fehler der Schallgeschwindigkeit auf diesen Fehler selbst geschlossen werden kann oder bis zu welchem systematischen Fehler eine Verschiebung der Verteilungen der Abweichungen noch aufgelöst werden kann. Zum anderen könne verschiedene Emitterkonstellationen ausprobiert werden, um die Frage zu beantworten, ob für eine gemischte Konstellation der Emitter immer die genauesten Ergebnisse bei der Rekonstruktion der Position erzielt wird.

Literaturverzeichnis

- [1] U.F. Katz and Ch. Spiering (2011). *High-Energy Neutrino Astrophysics: Status and Perspectives*. arXiv:1111.0507 [astro-ph.HE]
- [2] The KM3NeT Collaboration (27.1.2016). *KM3NeT Letter of Intent for ARCA and ORCA*. Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics, 43 (8), 084001, 2016
- [3] KM3Net Homepage URL: <https://www.km3net.org/category/multimedia/> (Stand 31.8.2016)
- [4] National Physical Laboratory. *Technical Guides - Speed of Sound in Sea-Water*. URL: <http://resource.npl.co.uk/acoustics/techguides/soundseawater/content.html> (Stand 31.8.2016)
- [5] Timothy F. Duda (July 11, 2005). *Derivation of ray equations in moving media in angle/depth form*. URL: http://www.whoi.edu/science/AOPE/cofdl/tim/Ray_eqs.pdf (Stand 31.8.2016)
- [6] C-T. Chen and F.J. Millero (1977). *Speed of sound in seawater at high pressures*. J. Acoust. Soc. Am. 62(5) pp 1129-1135

Abbildungsverzeichnis

1.1	Standort des in dieser Arbeit betrachteten „building blocks“ von KM3NeT [2]	4
1.2	Ein Digital Optical Modul, welches bei KM3NeT zum Einsatz kommt [2]	4
1.3	Grundsätzlicher Aufbau eines „building blocks“ von KM3NeT [3]	4
2.1	Temperaturprofil am Standort Porto Palo di Capo Passero	7
2.2	Druckprofil am Standort Porto Palo di Capo Passero	7
2.3	Salinitätsprofil am Standort Porto Palo di Capo Passero	8
2.4	Schallgeschwindigkeitsprofil am Standort Porto Palo di Capo Passero	8
2.5	Abweichung der berechneten Werte mittels UNESCO-Formel (2.1) von den berechneten Werte aus der Del Grosso-Formel der Schallgeschwindigkeit in Salzwasser am Standort Capo Passero von -3453.629 m bis -2453.629 m Tiefe	9
2.6	Trajektorien des Schalls aus dem gekoppelten Differentialgleichungssystem für verschiedene Startwinkel	10
2.7	Änderung des Winkels bzgl. der Tiefe z für verschiedene Abschusswinkel in einer Tiefen von 3453.629 m	11
2.8	Trajektorien des analytischen Modells für verschiedene Startwinkel	14
2.9	Vergleich der Trajektorie des analytischen Modells mit der Trajektorie des Modells der kürzesten Laufzeit aus Kapitel 2.2 für einen horizontalen Abstand von 1000 m und einem Startwinkel von 70°	15
2.10	Trajektorien des genäherten analytischen Modells für verschiedene Startwinkel	16
2.11	Vergleich der exakten Trajektorie mit der aus dem Modell der geradlinigen Ausbreitung mit gemittelter Schallgeschwindigkeit bei einem Startwinkel von 74°	17
3.1	Abweichung der berechneten Werte mittels UNESCO-Formel (2.1) von den Werte durch den Fit eines Polynom 4. Grades an diesen Schallgeschwindigkeitswerten am Standort Capo Passero von -3453.629 m bis -2453.629 m Tiefe	21
3.2	Emitterkonstellation mit mittlerer Entfernung von 200 m	21
3.3	Emitterkonstellation mit mittlerer Entfernung von 400 m	24
4.1	Verteilungen der Fehler der Positionierung für Empfänger $(200, 200, -3373.629)$.	29
4.2	Verteilungen der Fehler der Positionierung für Empfänger $(200, 200, -2761.629)$.	30
4.3	Verteilungen der Fehler der Positionierung für Empfänger $(400, 400, -3373.629)$.	32
4.4	Verteilungen der Fehler der Positionierung für Empfänger $(400, 400, -2761.629)$.	34
4.5	Emitterkonstellation mit Entferungen von 200 m und 400 m	35
4.6	Verteilungen der Fehler der Positionierung für Empfänger $(400, 400, -3373.629)$ mit Emitter in 200 m und 400 m Entfernung	36
4.7	Verteilungen der Fehler der Positionierung für Empfänger $(400, 400, -2761.629)$ mit Emitter in 200 m und 400 m Entfernung	38
4.8	Emitterkonstellation für Rekonstruktion des Empfängers: (Rot) Positionen der sechs Emitter; (Blau) Positionen der vier Emitter	40

- 4.9 Verschiebung der rekonstruierten Position unter Verwendung unterschiedlicher Anzahl an Emittern, welche im Mittel ca. 200 m vom „String“ entfernt sind . . . 42

Tabellenverzeichnis

3.1	Vergleich der Positionsbestimmungen für Position $(200, 200, -2761.629)$, welche dem höchsten DOM entspricht	22
3.2	Vergleich der Positionsbestimmungen für Position $(200, 200, -3373.629)$, welche dem höchsten DOM entspricht	23
3.3	Vergleich der Positionsbestimmungen für Position $(400, 400, -2761.629)$, welche dem höchsten DOM entspricht	24
3.4	Vergleich der Positionsbestimmungen für Position $(400, 400, -3373.629)$, welche dem höchsten DOM entspricht	25
4.1	Charakteristische Werte für die Verteilungen der Abweichung der Positionierung von der exakten Position $(200, 200, -3373.629)$	28
4.2	Charakteristische Werte für die Verteilungen der Abweichung der Positionierung von der exakten Position $(200, 200, -2761.629)$	28
4.3	Charakteristische Werte für die Verteilungen der Abweichung der Positionierung von der exakten Position $(400, 400, -3373.629)$	31
4.4	Charakteristische Werte für die Verteilungen der Abweichung der Positionierung von der exakten Position $(400, 400, -2761.629)$	33
4.5	Charakteristische Werte für die Verteilungen der Abweichung der Positionierung von der exakten Position $(400, 400, -3373.629)$ mit gemischten Emitterpositionen	35
4.6	Charakteristische Werte für die Verteilungen der Abweichung der Positionierung von der exakten Position $(400, 400, -2761.629)$ mit gemischten Emitterpositionen	37
4.7	Charakteristische Werte der beiden Rekonstruktionen für einen Zeitfehler von $10\mu s$ und einen systematischen Fehler von 1% der Schallgeschwindigkeit mit Emitter, die im Mittel 200 m entfernt sind	41

Erklärung

Hiermit bestätige ich, dass ich diese Arbeit selbstständig und nur unter Verwendung der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe.

Erlangen, den 31. August 2016

Christopher Geist

Acoustic propagation in deep water

U. Katz, Draft 0.5, 13.04.2009

Abstract: A derivation of a differential equation governing the propagation path of sound waves in deep water is given and an approximate solution presented, including leading corrections to propagation distances and times. It is assumed that the velocity of sound depends linearly on the vertical coordinate and that the medium is translation-invariant in horizontal directions.

Assumptions

1. The water is horizontally translation invariant (i.e. no currents, temperature variations etc.). As a consequence, sound propagation must be planar.
2. A coordinate system (x, z) is defined, with the z axis pointing vertically upward and x horizontally. Sound propagation is thus in the (x, z) plane and is described by a function $z(x)$ (“sound ray tracing”).
3. The velocity of sound is $c(z) = c_0 - kz$, where $c_0 \approx 1.5 \times 10^3$ m/s (depth dependent) and $k \approx 0.017$ /s.
4. All considerations are for the propagation of plane sound waves.

The differential equation

Two parallel “sound rays” at a vertical distance Δz are considered which propagate orthogonal to their common wave front (see Fig. 1). Note that in the following all entities denoted by $\delta \dots$ are considered to be infinitesimal, i.e. in the limit $\delta \dots \rightarrow 0$; Δz must be large compared to the vertical propagation of the “rays” in δx , but also goes to zero in the limit $\delta \dots \rightarrow 0$. In the time interval δt the rays traverse the interval δx . Due to the z dependence of the velocity of sound their path lengths during this interval differ by

$$\delta s = \delta t [c(z) - c(z + \Delta z)] = \delta t \cdot k \Delta z. \quad (1)$$

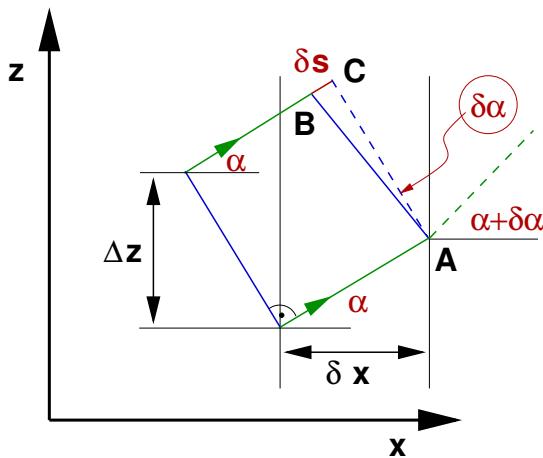


Figure 1. Two parallel “sound rays” (green) with a vertical distance of Δz propagating through an infinitesimal volume of water (width δx). Due to the z dependence of the sound velocity, the wave front (blue lines) is tilted by an angle $\delta \alpha$.

With $\delta x = c(z)\delta t \cdot \cos \alpha$ (see Fig. 1) this gives

$$\delta s = \frac{\delta x \cdot k\Delta z}{c(z) \cos \alpha}. \quad (2)$$

From the geometry of the triangle ABC we obtain (neglecting higher orders of $\delta\alpha$):

$$\delta s = \overline{AC} \cdot \tan(\delta\alpha) = \frac{\Delta z}{\cos \alpha} \cdot \delta\alpha. \quad (3)$$

The comparison of equations (2) and (3) results in

$$\frac{\delta\alpha}{\delta x} = \frac{k}{c(z)}. \quad (4)$$

In order to eliminate $\delta\alpha$ and δx , we use $dz/dx = \tan \alpha$:

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{d \tan \alpha}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dx} = (1 + \tan^2 \alpha) \frac{d\alpha}{dx}. \quad (5)$$

Identifying $\delta\alpha \equiv d\alpha$ and $\delta x \equiv dx$ finally results in

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \left[1 + \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 \right] \cdot \frac{k}{c(z)} \quad (6)$$

or, in simplified notation

$$z'' = k \frac{1 + (z')^2}{c_0 - kz}. \quad (7)$$

Approximate solution

For all practical purposes in current setups (existing or planned), the z range of interest will be less than a kilometre (this does not apply to sound coming from the surface; however, for such sources the assumed linear z dependence of the sound velocity is anyway invalid). Thus the term in the denominator of equation (7) can be approximated by $c_0 - kz \approx c_0$ with sub-percent accuracy. The resulting approximate differential equation is

$$z'' = \frac{k}{c_0} (1 + (z')^2), \quad (8)$$

which can be solved analytically by the ansatz

$$z'(x) = \tan \left(\frac{k}{c_0} (x - \xi) \right), \quad (9)$$

with ξ being an integration constant. Analytic integration yields

$$z(x) = -\frac{c_0}{k} \cdot \ln \left[\cos \left(\frac{k}{c_0} (x - \xi) \right) \right] + \zeta \quad (10)$$

with a further integration constant ζ .

The integration constants need to be determined from the initial/boundary conditions. Two cases are considered:

1. $z_0 = z(x_0)$ and $z'_0 = z'(x_0)$ are given

This corresponds to the emission of the signal with known direction from a source at known position. Without loss of generality we can set $x_0 = 0$; ξ and ζ are then given by

$$z'_0 = -\tan \frac{k\xi}{c_0} \Rightarrow \xi = -\frac{c_0}{k} \arctan(z'_0) \quad (11)$$

and, since $\cos x = 1/\sqrt{1+\tan^2 x}$,

$$\begin{aligned} z_0 &= z(0) = -\frac{c_0}{k} \ln [\cos(\arctan(z'_0))] + \zeta = \frac{c_0}{2k} \ln(1 + (z'_0)^2) + \zeta \\ \Rightarrow \zeta &= z_0 - \frac{c_0}{2k} \ln(1 + (z'_0)^2) . \end{aligned} \quad (12)$$

With these results, $z(x)$ can be written as

$$z(x) = z_0 - \frac{c_0}{k} \ln \left[\sqrt{1 + (z'_0)^2} \cos \left(\frac{kx}{c_0} + \arctan(z'_0) \right) \right] ; \quad (13)$$

using the relations $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ and $\sin x = \tan x / \sqrt{1+\tan^2 x}$, equation (13) can finally be simplified to

$$z(x) = z_0 - \frac{c_0}{k} \ln \left[\cos \left(\frac{kx}{c_0} \right) - z'_0 \sin \left(\frac{kx}{c_0} \right) \right] . \quad (14)$$

2. $z_0 = z(x_0)$ and $z_1 = z(x_1)$ are given

This corresponds to the propagation from a source to a receiver, both with known position. Again, we can use $x_0 = 0$; without loss of generality we can also assume $x_1 > 0$. We obtain the following two equations:

$$z_0 = -\frac{c_0}{k} \ln \left[\cos \left(\frac{k\xi}{c_0} \right) \right] + \zeta \quad (15)$$

$$z_1 = -\frac{c_0}{k} \ln \left[\cos \left(\frac{k(x_1 - \xi)}{c_0} \right) \right] + \zeta . \quad (16)$$

There is an analytic solution to this set of equations. We start by subtracting them from each other and then use the decomposition of $\cos(x+y)$:

$$\begin{aligned} z_1 - z_0 &= -\frac{c_0}{k} \ln \frac{\cos \left(\frac{k(x_1 - \xi)}{c_0} \right)}{\cos \left(\frac{k\xi}{c_0} \right)} \\ &= -\frac{c_0}{k} \ln \frac{\cos \left(\frac{kx_1}{c_0} \right) \cos \left(\frac{k\xi}{c_0} \right) + \sin \left(\frac{kx_1}{c_0} \right) \sin \left(\frac{k\xi}{c_0} \right)}{\cos \left(\frac{k\xi}{c_0} \right)} \\ &= -\frac{c_0}{k} \ln \left[\cos \left(\frac{kx_1}{c_0} \right) + \sin \left(\frac{kx_1}{c_0} \right) \tan \left(\frac{k\xi}{c_0} \right) \right] \\ \Rightarrow \xi &= \frac{c_0}{k} \arctan \frac{\exp \left(-\frac{k}{c_0} (z_1 - z_0) \right) - \cos \left(\frac{kx_1}{c_0} \right)}{\sin \left(\frac{kx_1}{c_0} \right)} . \end{aligned} \quad (17)$$

Inserting this result into equation (15) gives

$$\zeta = z_0 + \frac{c_0}{k} \ln \frac{\sin\left(\frac{kx_1}{c_0}\right)}{\sqrt{\sin^2\left(\frac{kx_1}{c_0}\right) + \left[\exp\left(-\frac{k}{c_0}(z_1 - z_0)\right) - \cos\left(\frac{kx_1}{c_0}\right)\right]^2}}. \quad (18)$$

Equation (17) can be used to calculate the directional offset with which a signal arrives at the receiver with respect to linear propagation. See Fig. 2 for a definition of the relevant angles.

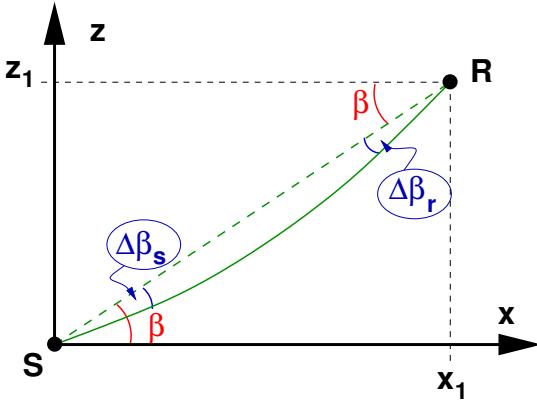


Figure 2. Propagation of a sound signal between the sender S at $(x, z) = (0, 0)$ and the receiver R at $(x, z) = (x_1, z_1)$: linear approximation (dashed) and real path (solid line). The emission/observation angle for linear propagation, β , is corrected by an offset $\Delta\beta_s$ at the sender and $\Delta\beta_r$ at the receiver side.

Inserting equation (17) into equation (9) and using $x = 0$ yields the slope of $z(x)$ at the sender:

$$z'(0) = -\tan\left(\frac{k\xi}{c_0}\right) = \frac{\cos\left(\frac{kx_1}{c_0}\right) - \exp\left(-\frac{k}{c_0}(z_1 - z_0)\right)}{\sin\left(\frac{kx_1}{c_0}\right)}. \quad (19)$$

If $kz/c_0, kx/c_0 \ll 1$ (i.e. for distances up to about a kilometre), we can expand this expression into a power series in k/c_0 :

$$\begin{aligned} z'(0) &= \frac{1 - \frac{1}{2}\left(\frac{kx_1}{c_0}\right)^2 - 1 + \frac{kz_1}{c_0} - \frac{1}{2}\left(\frac{kz_1}{c_0}\right)^2 + \mathcal{O}((k/c_0)^3)}{\frac{kx_1}{c_0} + \mathcal{O}((k/c_0)^3)} \\ &= \frac{z_1}{x_1} - \frac{k}{2c_0} \left(x_1 + \frac{z_1^2}{x_1}\right) + \mathcal{O}((k/c_0)^2). \end{aligned} \quad (20)$$

The left term just corresponds to the slope for linear propagation, $\beta = \arctan(z_1/x_1)$; the second term is the leading correction term. In order to calculate $\Delta\beta$, we use

$$\begin{aligned} \beta - \Delta\beta_s &= \arctan(z'(0)) \\ &\approx \arctan\left(\frac{z_1}{x_1}\right) - \frac{d\arctan x}{dx}\Big|_{x=\frac{z_1}{x_1}} \cdot \frac{k}{2c_0} \left(x_1 + \frac{z_1^2}{x_1}\right) \\ &= \beta - \frac{1}{1 + \left(\frac{z_1}{x_1}\right)^2} \cdot \frac{k}{2c_0} \left(x_1 + \frac{z_1^2}{x_1}\right) = \beta - \frac{k}{2c_0} \cdot x_1 \end{aligned} \quad (21)$$

Since sound propagation paths are reversible, i.e. the path from sender S to receiver R is the same as the one from R to S, and since $\Delta\beta_s = kx_1/(2c_0)$ only depends on x_1 , we find that $\Delta\beta_s = \Delta\beta_r \equiv \Delta\beta$. Note that this is only true in the approximation of the leading correction in equation (21).

Numerical example: For $x_1 = 300$ m we find $\Delta\beta = 1.7$ mrad.

Properties of the approximate solution

From equation (10) it can immediately be seen that $z(x)$ has a pole at

$$x_\infty = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{c_0 \xi}{k}, \quad (22)$$

at least if ξ is chosen such that $|k\xi/c_0| < \pi/2$. Equation (22) implies a limited horizontal range of a sound signal; note, however, that this argument is only valid in the approximation of equation (8) and only in the realm of linear z dependence of the sound velocity.

For boundary conditions of type (1), i.e. equation (13), the horizontal sound range can be explicitly calculated:

$$x_\infty = \frac{c_0}{k} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(z'_0) \right) = \frac{c_0}{k} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right), \quad (23)$$

where α is the emission angle (see Fig. 1). For the parameter values quoted above, $x_\infty \approx 140$ km for horizontal emission. However, to reach this limit, depths by far exceeding those of the Earth's oceans would be required.

The approximate solution $z(x)$ of equation (14) and its deviation $\Delta z(x) = z(x) - z_l(x)$ from a linear propagation $z_l(x) = z'_0 x$ are shown in Fig. 3 for emission from $(x_0, z_0) = (0, 0)$ under different directions.

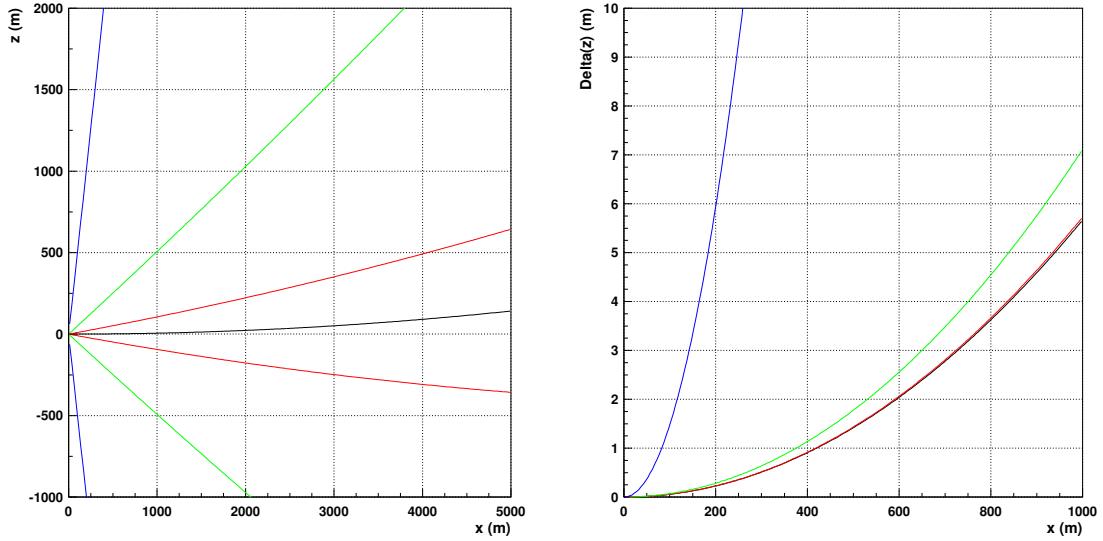


Figure 3. Sound propagation path $z(x)$ according to equation (14) (left) and deviation from linear propagation (right), for emission directions $z'_0 = \pm 5$ (blue), $z'_0 = \pm 0.5$ (green), $z'_0 = \pm 0.1$ (red) and $z'_0 = 0$ (horizontal emission, black). In the right plot, only non-negative values of z'_0 are considered; the deviations for $z'_0 < 0$ are almost identical to those for $|z'_0|$.

Propagation distances and times

As compared to the simplified assumption of linear propagation with constant velocity, the actual propagation times of sound signals are modified both by the curved propagation paths and by the z dependence of the sound velocity.

A sound signal travelling from x_0 to x_1 will, in the approximation of equations (9,10), cover the distance

$$L = \int_{x_0}^{x_1} dx \sqrt{1 + z'(x)^2} = \int_{x_0}^{x_1} dx \sqrt{1 + \tan^2 \left(\frac{k}{c_0}(x - \xi) \right)} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{\cos \left(\frac{k}{c_0}(x - \xi) \right)}, \quad (24)$$

where we have used the relation $1 + \tan^2 x = 1/\cos^2 x$. For the case of signal emission in direction α at x_0 , this integral can be solved analytically:

$$L = \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{\cos \left(\frac{kx}{c_0} + \alpha \right)} = \frac{c_0}{k} \left[\ln \left(\tan \left(\frac{kx}{2c_0} + \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right) \right]_{x_0}^{x_1} = \frac{c_0}{k} \ln \frac{\tan \left(\frac{kx_1}{2c_0} + \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} \right)}{\tan \left(\frac{kx_0}{2c_0} + \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} \right)}. \quad (25)$$

Note that for $k = 0$ (the linear case), equation (25) reduces to $L = (x_1 - x_0)/\cos \alpha$, as implied by elementary geometry.

The propagation time is given by

$$T = \frac{1}{c_0} \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx \sqrt{1 + z'(x)^2}}{1 - \frac{kz(x)}{c_0}}, \quad (26)$$

with $z(x)$ and $z'(x)$ to be inserted from equations (9,10) using appropriate values for ξ and ζ . This integral is not solvable analytically. However, it can be seen that corrections of order k/c_0 to the linear approximation, $T = L/c_0 = (x_1 - x_0)/(c_0 \cos \alpha)$, come from both the path length (term $\sqrt{1 + z'(x)^2}$) and from the z dependence of the velocity of sound (term $1/(1 - kz/c_0)$). Both corrections are thus of the same order and must be taken into account consistently.

If $kz/c_0, kx/c_0 \ll 1$ (i.e. for distances up to about a kilometre), we can develop the integrand of equation (26) in a power series of k/c_0 and neglect all terms of order $(k/c_0)^2$ and higher. We use the special case of boundary conditions of type (1) described above and obtain

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + (z'(x))^2} &= \frac{1}{\cos \left(\frac{kx}{c_0} + \alpha \right)} = \frac{1}{\cos \left(\frac{kx}{c_0} \right) \cos \alpha - \sin \left(\frac{kx}{c_0} \right) \sin \alpha} \\ &= \frac{1}{\cos \alpha - \frac{kx}{c_0} \sin \alpha} + \mathcal{O}((k/c_0)^2) \end{aligned} \quad (27)$$

$$\frac{kz(x)}{c_0} = \frac{kx}{c_0} \sin \alpha + \mathcal{O}((k/c_0)^2) \quad (28)$$

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{c_0} \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{\left(\cos \alpha - \frac{kx}{c_0} \sin \alpha \right) \cdot \left(1 - \frac{kx}{c_0} \sin \alpha \right)} + \mathcal{O}((k/c_0)^2) \\ &= \frac{1}{c_0 \cos \alpha} \int_{x_0}^{x_1} dx \left[1 + \frac{kx}{c_0} (\tan \alpha + \sin \alpha) \right] + \mathcal{O}((k/c_0)^2) \end{aligned} \quad (29)$$

and finally, after performing the integration

$$T = \frac{x_1 - x_0}{c_0 \cos \alpha} \left[1 + \frac{k}{c_0} (\tan \alpha + \sin \alpha) \frac{x_0 + x_1}{2} \right] + \mathcal{O}((k/c_0)^2). \quad (30)$$

It is important to note that the boundary conditions are chosen such that c_0 is the velocity of sound at the starting point of the signal, ($x_0 = 0, z_0 = 0$). Also, it is obvious that for $\alpha = 0$ the leading correction term is of order $(k/c_0)^2$.

Let's use an example to investigate the size of the correction term (i.e. the second term in the brackets). For $\alpha = 45^\circ$ and a horizontal distance of $x_1 - x_0 = 300\text{m}$, this correction is about 0.3%, i.e. the resulting time offset is 0.8 ms. This time offset will be smaller when considering the case of a signal travelling between two points of known position – in this case the angle β is to be used instead of α , and the directional offset $\Delta\beta$ calculated in equation (21) results in a reduction of $1/\cos \alpha \rightarrow 1/\cos(\beta - \Delta\beta)$ that compensates to some extent the correction term in the brackets. For the above example, the time offset is reduced to 0.4 ms.

To be done

1. Scrutinise all calculations, in particular those leading to the differential equation (7). Cross-check with literature (but don't trust circles à la Urick – they can be approximations at best).
2. Numerically (or analytically?) investigate the difference between the solutions of equations (7) and (8).
3. Calculate the next-to-leading correction terms for equations (21) and (30). Investigate whether they are of similar size as the difference between the solutions of equations (7) and (8).
4. Devise algorithms to implement proper corrections into the position calibration and generally into determinations of source directions and positions.
5. Check whether a more general treatment can be obtained numerically by replacing in equation (7) $k \rightarrow -(dc(z)/dz)$ and $c_0 - kz \rightarrow c(z)$ and using appropriate parametrisations of $c(z)$ that also cover the surface regime where the velocity of sound does not depend linearly on z .